Révisions sur les fonctions de la variable réelle à valeurs réelles

1. Continuité sur un intervalle

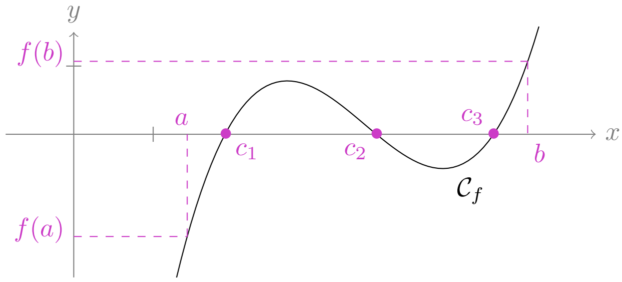
1.1. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1. — *Soient*

- I *un intervalle de* $\mathbf{R}$ *;*
- $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ *une fonction continue sur* I *;*
- a, b *des points de* I *tel que* $a < b$ *;*
- y *un point de* $\mathbf{R}$ *compris entre* $f(a)$ *et* $f(b)$.

Alors

$$\exists\, c \in [a,b] \quad f(c) = y$$



1.2. Image continue d'un intervalle

Corollaire 2. — *Si* I *est un intervalle de* $\mathbf{R}$ *et* $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ *est une fonction continue sur* I *alors*

$$f(I) = \{f(x) \ :\ x \in I\}$$

est un intervalle.

1.3. Image d'un intervalle par une fonction continue strictement monotone

Corollaire 3. — *Soit* $(a,b) \in \overline{\mathbf{R}}$ *tel que* $a < b$.

1. *Si* $f\colon]a,b[\to \mathbf{R}$ *est une fonction continue, strictement croissante alors* $f(]a,b[) = \left]\lim_{x\to a^+} f(x), \lim_{x\to b^-} f(x)\right[$.
2. *Si* $f\colon [a,b[\to \mathbf{R}$ *est une fonction continue, strictement croissante alors* $f([a,b[) = \left[f(a), \lim_{x\to b^-} f(x)\right[$.
3. *Si* $f\colon]a,b] \to \mathbf{R}$ *est une fonction continue, strictement croissante alors* $f(]a,b]) = \left]\lim_{x\to a^+} f(x), f(b)\right]$.
4. *Si* $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ *est une fonction continue, strictement croissante alors* $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$.
5. *Si* $f\colon]a,b[\to \mathbf{R}$ *est une fonction continue, strictement décroissante alors* $f(]a,b[) = \left]\lim_{x\to b^-} f(x), \lim_{x\to a^+} f(x)\right[$.
6. *Si* $f\colon [a,b[\to \mathbf{R}$ *est une fonction continue, strictement décroissante alors* $f([a,b[) = \left]\lim_{x\to b^-} f(x), f(a)\right]$.
7. *Si* $f\colon]a,b] \to \mathbf{R}$ *est une fonction continue, strictement croissante alors* $f(]a,b]) = \left[f(b), \lim_{x\to a^+} f(x)\right[$.
8. *Si* $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ *est une fonction continue, strictement croissante alors* $f([a,b]) = [f(b), f(a)]$.

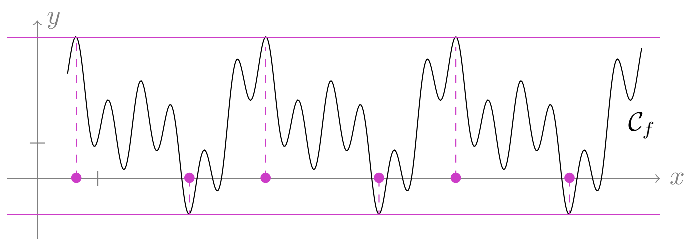
1.4. Théorème des bornes atteintes

Théorème 4. — *Soient*

- a, b *des réels tels que* $a < b$
- f *une fonction continue sur le segment* $[a,b]$.

Alors la fonction f *est bornée et atteint ses bornes, i.e.*

$$\exists\,(x_m, x_M) \in [a,b]^2 \quad \forall\, x \in [a,b] \quad f(x_m) \leqslant f(x) \leqslant f(x_M)\ .$$



1.5. Image d'un segment par une application continue

Théorème 5. — *Soient* a *et* b *des réels tels que* $a < b$ *et* f *une fonction continue sur le segment* $[a,b]$. *Alors*

$$f([a,b]) = \left[\min_{[a,b]} f\ ,\ \max_{[a,b]} f\right]$$

1.6. Fonction continue et injective sur un intervalle

Théorème 6. — *Soient I un intervalle et $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur I et injective. Alors la fonction f est strictement monotone sur I.*

1.7. Version enrichie du théorème de la bijection

Théorème 7. — *Soient I un intervalle et $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur I et strictement monotone. Alors f induit une bijection*

$$\widetilde{f} \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & f(I) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

de I sur $f(I)$ et sa bijection réciproque

$$\widetilde{f}^{\,-1} \left| \begin{array}{ccc} f(I) & \longrightarrow & I \\ y & \longmapsto & \text{l'unique solution de l'équation } y = f(x) \text{ d'inconnue } x \text{ dans } I \end{array} \right.$$

est bijective, de même strictement monotonie que f et est continue sur l'intervalle $f(I)$.

2. Nombre dérivé, fonction dérivée

2.1. Dérivabilité en un point et nombre dérivé

Définition 8. — *Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, $a \in I$, $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. On dit que la fonction f est dérivable au point a si la fonction*

$$\tau_a(f) \left| \begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array} \right.$$

possède une limite finie lorsque x tend vers a. Si tel est le cas, on appelle nombre dérivé de f en a le réel noté $f'(a)$ défini par

$$f'(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

2.2. Développement limité à l'ordre 1

Définition 9. — *Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, $a \in I$ et $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. On dit que f possède un développement limité à l'ordre 1 en a si*

$$\exists\,(\alpha_0,\alpha_1) \in \mathbf{R}^2 \quad \exists\,\delta > 0 \quad \exists\,\varepsilon \in \mathbf{R}^{[a-\delta,a+\delta]} \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall\, x \in I \cap [a-\delta,a+\delta] \quad f(x) = \alpha_0 + \alpha_1\,(x-a) + (x-a)\,\varepsilon(x) \\ \text{et} \\ \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0 \end{array} \right.$$

Proposition 10. — *I un intervalle de $\mathbf{R}$, $a \in I$, $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. Alors f est dérivable en a si et seulement si f possède un DL1 en a. Plus précisément, on dispose des deux résultats suivants.*

1. *si f est dérivable en a, alors*

$$\exists\,\delta > 0 \quad \exists\,\varepsilon \in \mathbf{R}^{[a-\delta,a+\delta]} \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in I \cap [a-\delta,a+\delta] \quad f(x) = f(a) + (x-a)\,f'(a) + (x-a)\,\varepsilon(x) \\ \text{et} \\ \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0 \end{array} \right.$$

2. *si f possède le DL1 en a suivant*

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1\,(x-a) + (x-a)\,\varepsilon(x) \qquad \text{où} \qquad \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0 \text{ et } (\alpha_0,\alpha_1) \in \mathbf{R}^2$$

   alors $\alpha_0 = f(a)$, f est dérivable en a et $\alpha_1 = f'(a)$.

2.3. La dérivabilité implique la continuité

Proposition 11. — *Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, $a \in I$ et $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. Si la fonction f est dérivable au point a, alors elle est continue au point a.*

2.4. Dérivabilité sur un intervalle et fonction dérivée

Définition 12. — *Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et une fonction $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$.*

1. *La fonction f est dite dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I.*
2. *Si f est dérivable sur I alors la fonction dérivée de f est la fonction notée f' définie par*

$$f' \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) := \displaystyle\lim_{\substack{y \to x \\ y \neq x}} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \end{array} \right.$$

2.5. Opérations algébriques sur les fonctions dérivables

Théorème 13. — *Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, $a \in I$ et $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$, $g\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ des fonctions dérivables au point a.*

1. *Si $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ alors la fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable au point a et*

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda\, f'(a) + \mu\, g'(a)$$

2. *La fonction $f \times g$ est dérivable au point a et*

$$(f \times g)'(a) = f'(a) \times g(a) + f(a) \times g'(a)$$

3. *Si la fonction g ne s'annule pas sur I alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue au point a et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \times g(a) - f(a) \times g'(a)}{g(a)^2}$$

2.6. Composée de deux fonctions dérivables

Théorème 14. — *Soient I, J des intervalles, $a \in I$, $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction telle que $f(I) \subset J$ et $g\colon J \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$, alors la fonction $g \circ f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ est dérivable en a et*

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$$

2.7. Dérivabilité et dérivée d'une réciproque

Théorème 15. — *Soient I, J deux intervalles de $\mathbf{R}$, $f\colon I \longrightarrow J$ une fonction bijective et dérivable sur I et $y_0 \in J$.*

1. *La fonction $f^{-1}\colon J \longrightarrow I$ est dérivable en y_0 si et seulement si :*

$$f'\left(f^{-1}(y_0)\right) \neq 0$$

2. *Si f^{-1} est dérivable en y_0 alors*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}$$

2.8. Dérivabilité et dérivée des fonctions usuelles

Fonction f	Nombre dérivé $f'(x)$ de f en $x \in \mathcal{D}'_f$	$\mathcal{D}'_f$
$f\colon x \longmapsto a \qquad (a \in \mathbf{R})$	$f'(x) = 0$	$\mathbf{R}$
$f\colon x \longmapsto x^n \qquad (n \in \mathbf{N}^*)$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbf{R}$
$f\colon x \longmapsto \dfrac{1}{x^n} = x^{-n} \qquad (n \in \mathbf{N}^*)$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$	$\mathbf{R}^*$
$f\colon x \longmapsto x^\alpha := e^{\alpha \ln(x)} \qquad (\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z})$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbf{R}_{>0}$
$f\colon x \longmapsto \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbf{R}_{>0}$
$f\colon x \longmapsto \ln(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbf{R}_{>0}$
$f\colon x \longmapsto e^x$	$f'(x) = e^x$	$\mathbf{R}$
$f\colon x \longmapsto \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$\mathbf{R}$
$f\colon x \longmapsto \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	$\mathbf{R}$
$f\colon x \longmapsto \tan(x) := \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$
$f\colon x \longmapsto \mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	$f'(x) = \mathrm{sh}(x)$	$\mathbf{R}$
$f\colon x \longmapsto \mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	$f'(x) = \mathrm{ch}(x)$	$\mathbf{R}$
$f\colon x \longmapsto \mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	$f'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \mathrm{th}^2(x)$	$\mathbf{R}$
arcsin	$\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$
arccos	$\arccos'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$
arctan	$\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbf{R}$

2.9. Dérivabilité et dérivée de certaines composées usuelles

Nombre dérivé en $x \in I$	Contexte et hypothèse
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(u(ax+b)\right) = a \times u'(ax+b) \qquad ((a,b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R})$	$x \in I \longmapsto ax+b \in J$, $u\colon J \longrightarrow \mathbf{R}_{>0}$ dérivable sur I
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(u^{\alpha}(x)\right) = \alpha \times u'(x) \times u^{\alpha-1}(x) \qquad (\alpha \in \mathbf{R})$	$u\colon I \longrightarrow \mathbf{R}_{>0}$ dérivable sur I
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\sqrt{u(x)}\right) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$u\colon I \longrightarrow \mathbf{R}_{>0}$ dérivable sur I
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(\sin(u(x))) = u'(x) \times \cos(u(x))$	$u\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ dérivable sur I
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(\cos(u(x))) = -u'(x) \times \sin(u(x))$	$u\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ dérivable sur I
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(e^{u(x)}\right) = u'(x) \times e^{u(x)}$	$u\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ dérivable sur I
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\ln(u(x))\right) = \frac{u'(x)}{u(x)}$	$u\colon I \longrightarrow \mathbf{R}_{>0}$ dérivable sur I
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\arcsin(u(x))\right) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$	$u\colon I \longrightarrow]-1,1[$ dérivable sur I
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\arctan(u(x))\right) = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$	$u\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ dérivable sur I

3. Extremum local et point critique

3.1. Définition d'un point critique

Définition 16. — *Soient I un intervalle, $a \in I$ et $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable en a. On dit que a est un point critique de f si $f'(0)$.*

3.2. Définition d'un point extremum local

Définition 17. — *Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, $a \in I$ et $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction.*

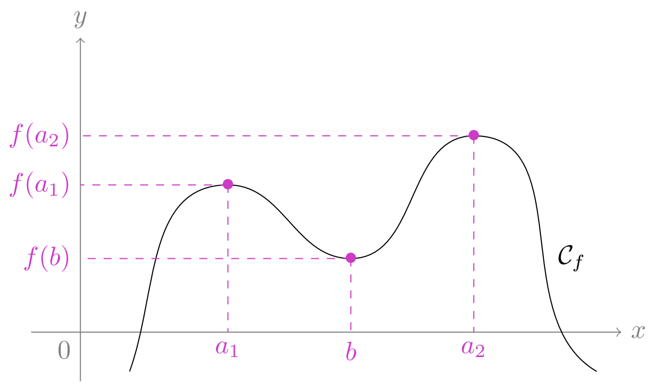
1. *On dit que f atteint un maximum local au point a s'il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\forall\, x \in I \cap\,]a-\alpha, a+\alpha[\quad f(x) \leqslant f(a)$$

2. *On dit que f atteint un minimum local au point b s'il existe $\beta > 0$ tel que*

$$\forall\, x \in I \cap\,]b-\beta, b+\beta[\quad f(x) \geqslant f(b)$$

3. *On dit que f atteint un extremum local au point c si f atteint un maximum local au point c ou si f atteint un minimum local au point c.*



3.3. Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur

Théorème 18. — *Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, $a \in \overset{o}{I}$ (intérieur de l'intervalle I) et $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable au point a. Alors*

$$f \text{ admet un extremum local au point } a \implies a \text{ est un point critique de } f$$

Si a est un point critique intérieur d'une fonction $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$, alors la fonction f n'atteint pas nécessairement un extremum local au point a. En effet, considérons la fonction cube

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array} \right.$$

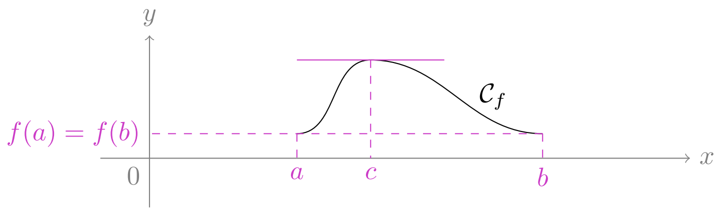
Le point 0 est un point critique de f mais la fonction f n'atteint pas un extremum local en 0.

4. Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

4.1. Théorème de Rolle

Théorème 19. — *Soient a, b des réels tels que $a < b$ et $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur le segment $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$ alors*

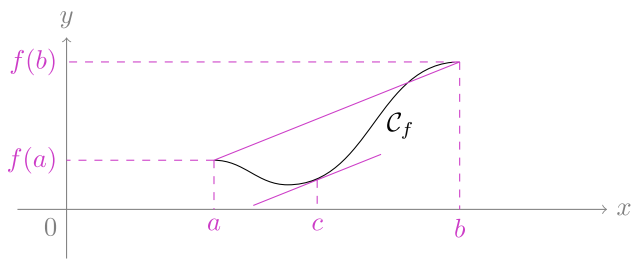
$$\exists\, c \in\,]a, b[\quad f'(c) = 0$$



4.2. Égalité des accroissements finis

Théorème 20. — *Soient a, b des réels tels que $a < b$ et $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur le segment $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Alors*

$$\exists\, c \in\,]a, b[\quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$



4.3. Inégalité des accroissements finis

Théorème 21. — *Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction une application dérivable sur I. S'il existe $k \in \mathbf{K}$ tel que*

$$\forall\, x \in I \quad |f'(x)| \leqslant k$$

alors la fonction f est k-lipschitzienne sur I.

4.4. Caractérisation des fonctions dérivables constantes

Corollaire 22. — *Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable. Alors*

$$f \text{ est constante sur } I \iff \forall\, x \in I \quad f'(x) = 0$$

Dans la proposition 22, l'hypothèse « I est un intervalle de $\mathbf{R}$ » est cruciale. En effet, la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

est dérivable sur $\mathbf{R}^*$, de dérivée nulle sur $\mathbf{R}^*$, mais elle n'est pas constante sur $\mathbf{R}^*$.

4.5. Caractérisation des fonctions dérivables monotones

Théorème 23. — *Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable.*

La fonction f est croissante sur I si et seulement si

$$\forall\, x \in I \quad f'(x) \geqslant 0$$

La fonction f est décroissante sur I si et seulement si

$$\forall\, x \in I \quad f'(x) \leqslant 0$$

4.6. Caractérisation des fonctions dérivables strictement monotones

Théorème 24. — *Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable.*

La fonction f est strictement croissante sur I si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{l} \quad \forall\, x \in I \quad f'(x) \geqslant 0 \\ \textit{et} \\ \quad \forall\, (a,b) \in I^2 \quad a < b \implies f'_{|\,[a,b]} \neq 0_{\mathbf{R}^{[a,b]}} \end{array}\right.$$

La fonction f est strictement décroissante sur I si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{l} \quad \forall\, x \in I \quad f'(x) \leqslant 0 \\ \textit{et} \\ \quad \forall\, (a,b) \in I^2 \quad a < b \implies f'_{|\,[a,b]} \neq 0_{\mathbf{R}^{[a,b]}} \end{array}\right.$$

4.7. Théorème de la limite de la dérivée

Théorème 25. — *de la limite de la dérivée Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, $a \in I$, $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction et $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$. On suppose que la fonction f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et que $f'(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$. Alors*

1. *Que ℓ soit un réel ou $\pm\infty$, le taux d'accroissement de f en a a pour limite ℓ en a, i.e.*

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} \ell$$

2. *Si ℓ est un nombre réel alors*
   (a) *la fonction f est dérivable en a*
   (b) *$f'(a) = \ell$*
   (c) *la fonction f' est continue en a*

5. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

5.1. Définition d'une fonction de classe $\mathcal{C}^k$

Définition 26. — *Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$.*

1. *Une fonction $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ est dite de classe $\mathcal{C}^0$ sur I si elle est continue sur I.*
2. *Si $k \in \mathbf{N}^*$, alors une fonction $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ est dite de classe $\mathcal{C}^k$ sur I si elle est k fois dérivable sur I et si sa dérivée k-ième $f^{(k)}$ est continue sur I.*
3. *Une fonction $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si elle est indéfiniment dérivable sur I.*

Notation. — Soient I un intervalle non vide et non réduit à un point et $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. On pose

$$\mathcal{C}^k(I,\mathbf{R}) := \left\{ f \in \mathbf{R}^I \ : \ f \text{ est de classe } \mathcal{C}^k \text{ sur } I \right\}.$$

Remarque 27. — Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$.

1. La suite $\left(\mathcal{C}^k(I,\mathbf{R})\right)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite décroissante de parties de $\mathbf{R}^I$ i.e.

$$\forall\, k \in \mathbf{N} \quad \mathcal{C}^{k+1}(I,\mathbf{R}) \subset \mathcal{C}^k(I,\mathbf{R}).$$

2. $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbf{R}) = \displaystyle\bigcap_{k\in\mathbf{N}} \mathcal{C}^k(I,\mathbf{R})$
3. Pour toute fonction $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{C}^{k+1}(I,\mathbf{R}) \quad &\iff \quad f \in \mathcal{C}^k(I,\mathbf{R}) \text{ et } f^{(k)} \in \mathcal{C}^1(I,\mathbf{R}) \\ &\iff \quad f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbf{R}) \text{ et } f' \in \mathcal{C}^k(I,\mathbf{R}). \end{aligned}$$

5.2. Régularité des fonctions usuelles

Proposition 28. —

1. *Une fonction polynomiale est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbf{R}$ *et a ses dérivées itérées nulles à partir d'un certain rang.*
2. *Une fonction rationnelle est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur son domaine de définition.*
3. *La fonction* $\sqrt{\cdot}\colon \mathbf{R}_{\geqslant 0} \longrightarrow \mathbf{R}$ *est de classe* $\mathcal{C}^0$ *sur* $\mathbf{R}_{\geqslant 0}$, *non dérivable en 0 et de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbf{R}_{>0}$.
4. *Si* $\alpha \in \mathbf{R}$ *alors la fonction* $p_\alpha\colon \mathbf{R}_{>0} \longrightarrow \mathbf{R}\ ;\ x \longmapsto x^\alpha$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbf{R}_{>0}$.
5. *La fonction* tan *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$.
6. *La fonction* ln *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbf{R}_{>0}$.
7. *Les fonctions* exp, ch, sh, th, cos, sin *et* arctan *sont de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbf{R}$.
8. *Les fonctions* arcsin *et* arccos *sont de classe* $\mathcal{C}^0$ *sur* $[-1,1]$, *non dérivables en* -1 *et* 1, *et sont de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]-1,1[$.

5.3. Combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Proposition 29. — *Soient* I *un intervalle de* $\mathbf{R}$ *et* $k \in \mathbf{N}^* \cup \{\infty\}$. *Alors*

$$\forall\,(\lambda,\mu)\in\mathbf{R}^2 \quad \forall\,(f,g)\in\mathcal{C}^k(I,\mathbf{R})^2 \quad \lambda f+\mu g\in\mathcal{C}^k(I,\mathbf{R}) \quad \textit{et} \quad (\lambda f+\mu g)^{(k)}=\lambda f^{(k)}+\mu g^{(k)}$$

5.4. Produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ et formule de Leibniz

Proposition 30. — *Soient* I *un intervalle de* $\mathbf{R}$, $k \in \mathbf{N}^* \cup \{\infty\}$. *Si* $(f,g) \in \mathcal{C}^k(I,\mathbf{R})^2$ *alors la fonction*

$$fg \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x)g(x) \end{array} \right.$$

est de classe $\mathcal{C}^k$ *sur* I *et*

$$(fg)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)} \qquad [\textit{formule de Leibniz}]$$

5.5. Composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ et formule de Leibniz

Proposition 31. — *Soient* I *et* J *des intervalles de* $\mathbf{R}$, $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ *une fonction telle que* $f(I) \subset J$, $g\colon J \longrightarrow \mathbf{R}$ *une fonction et* $k \in \mathbf{N}^* \cup \{\infty\}$. *Si* $f \in \mathcal{C}^k(I,\mathbf{R})$ *et* $g \in \mathcal{C}^k(J,\mathbf{R})$ *alors* $g \circ f \in \mathcal{C}^k(I,\mathbf{R})$.

5.6. Quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Proposition 32. — *quotient de deux fonctions de classe* $\mathcal{C}^k$ *Soient* I *un intervalle de* $\mathbf{R}$ *et* $k \in \mathbf{N}^* \cup \{\infty\}$. *Si* $(f,g) \in \mathcal{C}^k(I,\mathbf{R})^2$ *et si* g *ne s'annule pas sur* I *alors la fonction*

$$\frac{f}{g} \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)}{g(x)} \end{array} \right.$$

est de classe $\mathcal{C}^k$ *sur* I.

5.7. Réciproque d'une fonction bijective classe $\mathcal{C}^k$

Proposition 33. — *Soient* I *et* J *deux intervalles de* $\mathbf{R}$, $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ *une fonction et* $k \in \mathbf{N}^* \cup \{\infty\}$. *Si* $f\colon I \longrightarrow J$ *est une fonction bijective, de classe* $\mathcal{C}^k$ *sur* I *avec une dérivée qui ne s'annule pas sur* I, *alors la fonction*

$$f^{-1} \left| \begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & I \\ y & \longmapsto & \textit{l'unique } x \in I \textit{ tel que } f(x)=y \end{array} \right.$$

est de classe $\mathcal{C}^k$ *sur* J.

6. Généralités sur les fonctions Convexes

6.1. Définition d'une fonction convexe (resp. concave)

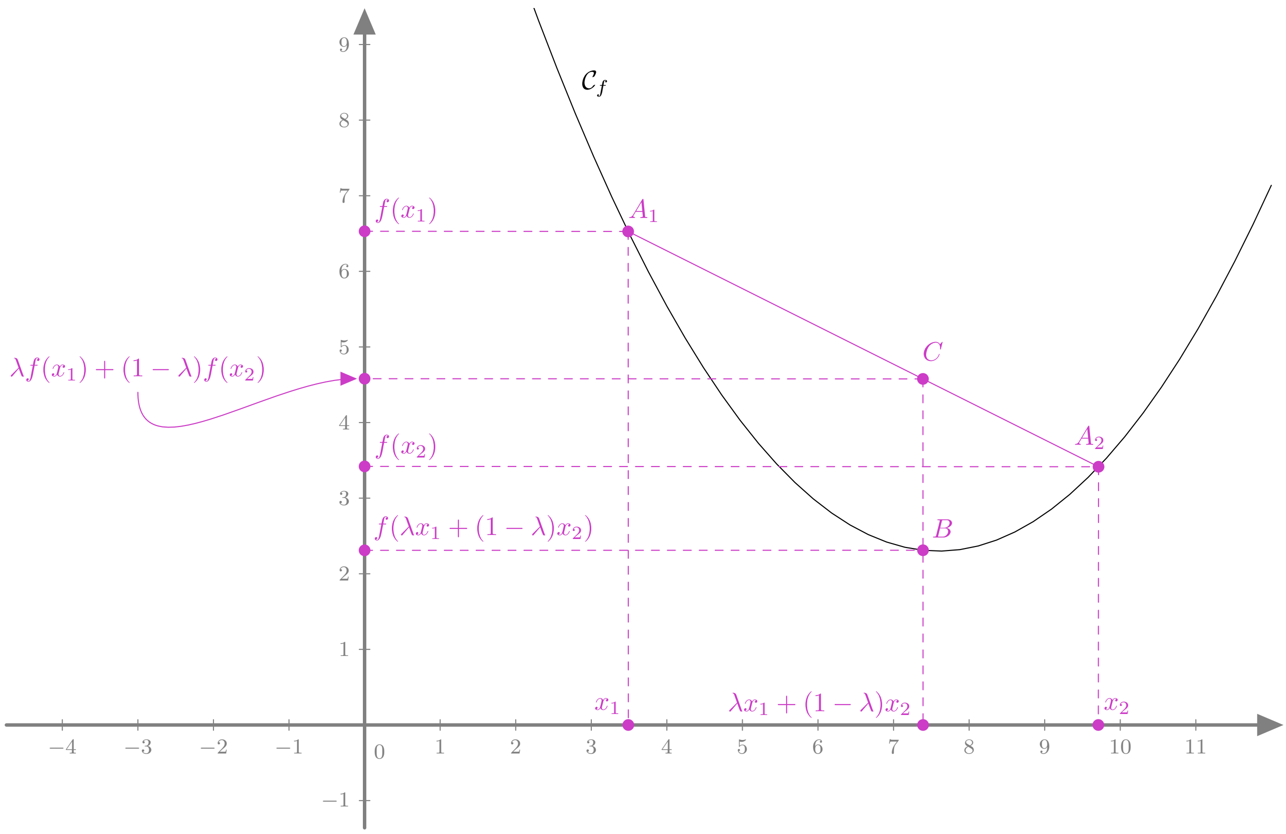
Définition 34. — *convexité/concavité d'une fonction Soit une fonction $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$.*

1. *f est convexe si*
$$\forall\,(x,y)\in I^2 \quad \forall\,\lambda\in[0,1] \quad f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$
2. *f est concave si*
$$\forall\,(x,y)\in I^2 \quad \forall\,\lambda\in[0,1] \qquad f(\lambda x+(1-\lambda)y)\geqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

Soient une fonction $f\colon I\longrightarrow \mathbf{R}$, $(x_1,x_2)\in I^2$ et $\lambda\in[0,1]$. Considérons les trois points

$$A_1(x_1,f(x_1)) \qquad A_2(x_2,f(x_2)) \qquad B(\lambda\,x_1+(1-\lambda)\,x_2, f(\lambda\,x_1+(1-\lambda)\,x_2))$$

de la courbe représentative de f, notée $\mathcal{C}_f$. Le segment $[A_1,A_2]$, dont les extrémités sont des points de $\mathcal{C}_f$, est appelé une corde de $\mathcal{C}_f$. Notons C le point de la corde $[A_1,A_2]$ d'abscisse $\lambda\,x_1+(1-\lambda)\,x_2$.



La droite (A_1A_2) a comme coefficient directeur $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ et passe par le point de $A_1(x_1,f(x_1))$. Son équation cartésienne réduite est donc

$$y=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\,(x-x_1)+f(x_1)$$

Ainsi l'ordonnée de C est-elle $\lambda\,f(x_1)+(1-\lambda)\,f(x_2)$. Nous déduisons de cette étude que

$$C \text{ est au-dessus de } B \quad\Longleftrightarrow\quad \underbrace{f(\lambda\,x_1+(1-\lambda)\,x_2)}_{\text{ordonnée de } B}\leqslant \underbrace{\lambda\,f(x_1)+(1-\lambda)\,f(x_2)}_{\text{ordonnée de } C}.$$

Ceci étant vrai pour tout $(x_1,x_2)\in I^2$ et pour tout $\lambda\in[0,1]$, nous en déduisons la caractérisation géométrique suivante de la convexité.

La fonction f est convexe si et seulement si toutes les cordes de $\mathcal{C}_f$ sont au-dessus de $\mathcal{C}_f$.

Remarque 35. — Une fonction $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ est concave si et seulement si son opposée $-f$ est convexe. Les résultats que nous établirons pour les fonctions convexes se transposeront aux fonctions concaves grâce à l'observation précédente.

6.2. Inégalité de Jensen

Lemme 36. — *Soient $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in I^n$, pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in (\mathbf{R}_+)^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Alors*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i \in I$$

Proposition 37. — *Soit $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe. Pour tout $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in I^n$, pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in (\mathbf{R}_+)^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$*

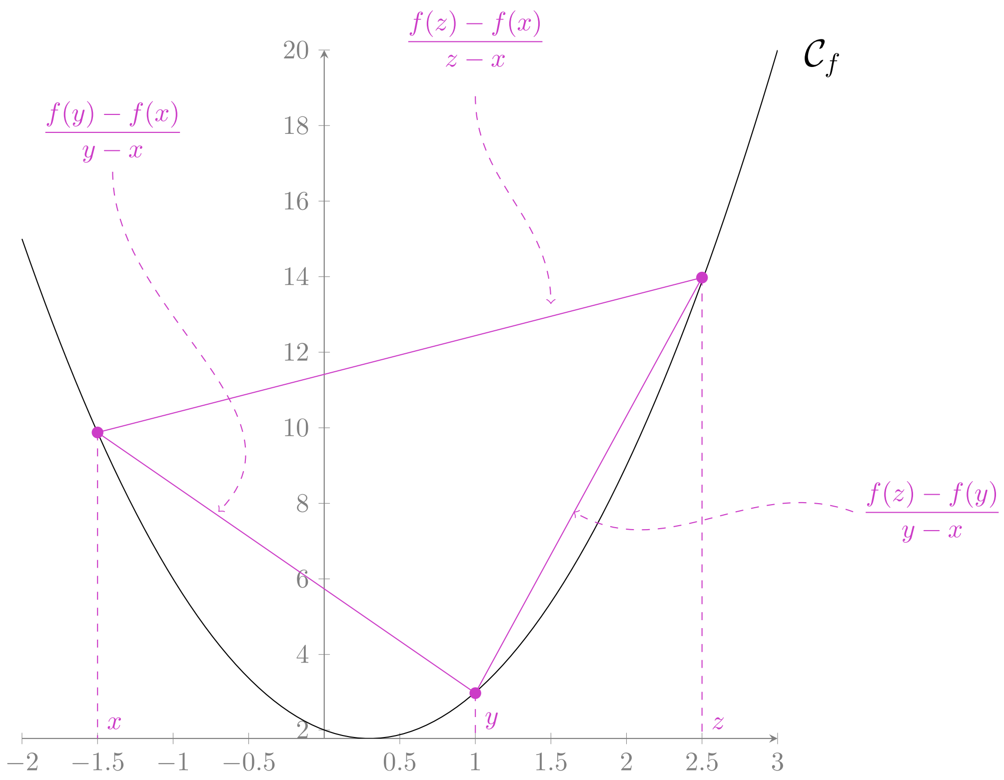
$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, f(x_i) \qquad [\textit{inégalité de Jensen}]$$

6.3. Inégalité des trois pentes

Proposition 38. — *Soit $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe. Pour tout $x < y < z$ dans I*

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y} \qquad [\textit{inégalité des trois pentes}]$$

Ci-dessous on donne une illustration géométrique de l'inégalité des trois pentes, par ailleurs commode pour formuler correctement l'énoncé.



6.4. Caractérisation de la convexité par la croissance des pentes

Proposition 39. — *Soit $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. L'application f est convexe si et seulement si, pour tout $a \in I$, la fonction*

$$p_a \left| \begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array} \right. \qquad [\textit{fonction pente au point } a]$$

est croissante.

6.5. position d'une courbe de fonction convexe par rapport à une de ses sécantes

Proposition 40. — *Soient $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe, a, b des points de I tels que $a < b$ et $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ les points de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives a et b.*

1. $\forall\, x \in [a, b] \quad f(x) \leqslant \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a) + f(a)$
2. $\forall\, x \in I \setminus [a, b] \quad f(x) \geqslant \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a) + f(a)$

Nous conservons les notations de la proposition 40. La droite sécante (AB) à la courbe $\mathcal{C}_f$ a pour équation réduite

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a) + f(a)$$

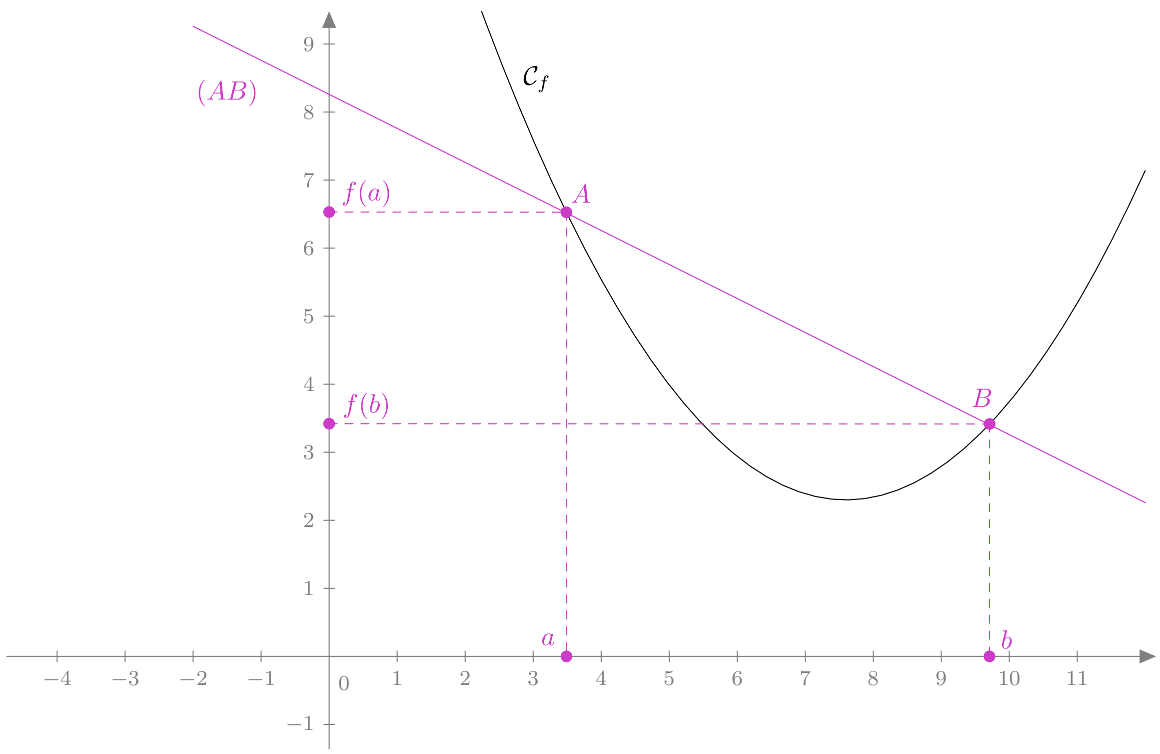
L'assertion 1 de la proposition 40 signifie que

la sécante (AB) est au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $[a, b]$

et l'assertion 2 de la proposition 40 exprime que

la sécante (AB) est en dessous de la courbe $\mathcal{C}_f$ en dehors de l'intervalle $[a, b]$

ce qu'illustre la figure ci-dessous.



7. Fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables

7.1. Caractérisation des fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables

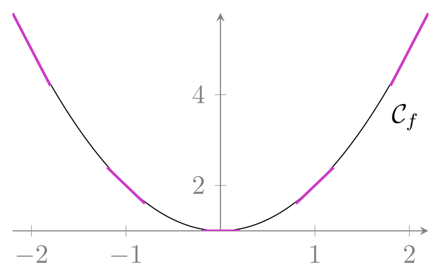
Théorème 41. — *Soit $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction.*

1. *Si f est dérivable sur I alors*

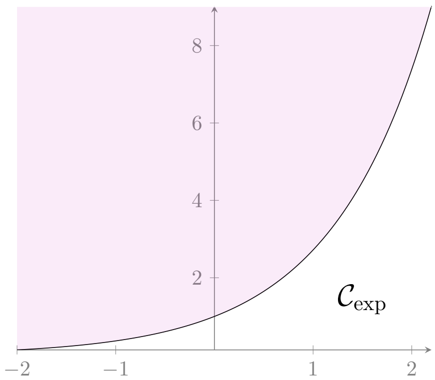
$$f \text{ est convexe} \iff f' \text{ est croissante.}$$

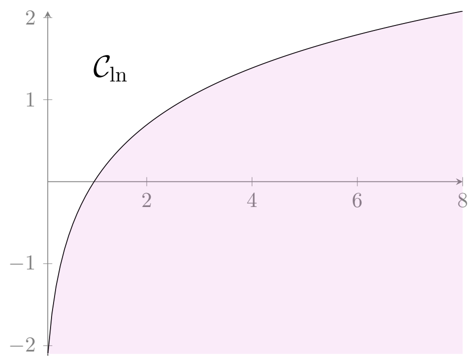
2. *Si f est deux fois dérivable sur I alors*

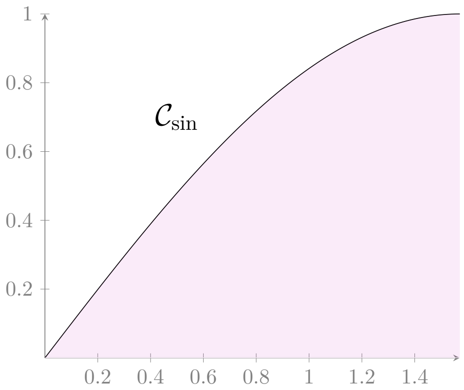
$$f \text{ est convexe} \iff f'' \geqslant 0.$$



Exemple 42. — La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbf{R}$, la fonction logarithme est concave sur $\mathbf{R}_{>0}$ et la fonction sinus est concave sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.





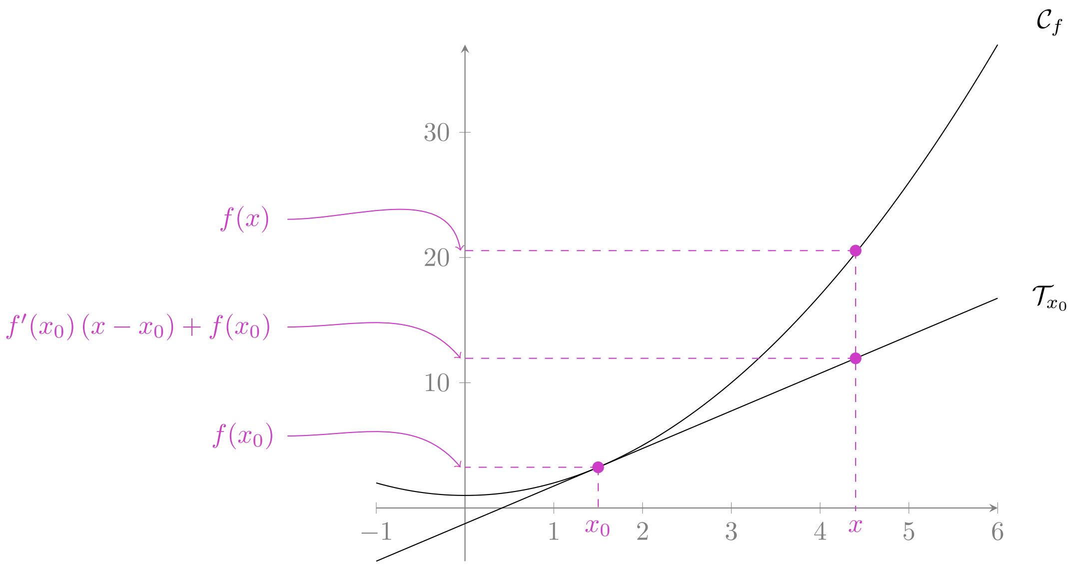


7.2. Position du graphe d'une fonction convexe dérivable par rapport à ses tangentes

Théorème 43. — *Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur I. La fonction f est convexe si et seulement si son graphe est au-dessus de toutes ses tangentes, i.e. si et seulement si*

$$\forall x_0 \in I \quad \forall x \in I \qquad f(x) \geqslant f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0).$$

On illustre ci-dessous le théorème 43.



8. Quatre inégalités classiques

Proposition 44. — *On dispose des inégalités suivantes pour les fonctions* exp*,* ln *et* sin.

$$\forall\, x \in \mathbf{R} \quad 1 + x \leqslant e^x \qquad\qquad \forall\, x \in]-1, +\infty[\quad \ln(1+x) \leqslant x$$

$$\forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \frac{2}{\pi}\, x \leqslant \sin(x) \leqslant x \qquad\qquad \forall\, x \in \mathbf{R} \quad |\sin(x)| \leqslant |x|$$