Programme de la colle n°10 (6-10 janvier)

Suites et séries de fonctions 1

1. Déroulement de la colle

Étudiants de MPI

La colle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (5 points, 10 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un des exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document (5 points, 15 minutes maximum) : ils auront été travaillés en amont de la colle et les solutions seront exposées avec dynamisme. L'accent sera mis sur la compréhension des concepts et, jamais, on ne récitera un corrigé non compris.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (10 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

Étudiants de MPI*

La colle comporte deux phases.

1. Rédaction d'une question de cours (5 points, 10 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (15 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

N.B. : Les étudiants de MPI* auront impérativement étudié les exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document.

2. Programme

§ Suites et séries de fonctions 1 — *convergence simple d'une suite de fonctions, convergence uniforme d'une suite de fonctions, convergence uniforme dans le cas où les fonctions sont bornées, un critère séquentiel de non-convergence uniforme, passage du local pour la convergence simple (mais pas pour la convergence uniforme), synthèse sur la convergence d'une suite de fonctions définies sur une partie de* $\mathbf{R}$*, la convergence simple n'est pas associée à une norme (HP), convergence simple d'une série de fonctions, convergence uniforme d'une série de fonctions, convergence uniforme d'une série de fonctions versus convergence uniforme de la suite des restes vers la fonction nulle, convergence normale d'une série de fonctions bornées, synthèse sur la convergence d'une séries de fonctions bornées sur une partie de* $\mathbf{R}$*, approximation uniforme.*

Seuls les modes de convergence des suites/séries de fonctions figurent au programme de cette colle. Si

- la préservation de la continuité par convergence uniforme
- l'échange entre $\lim\limits_{n\to+\infty}$ et $\displaystyle\int_a^b$ sous hypothèse de convergence uniforme sur le segment $[a, b]$

ont été traités en exercices, on ne peut demander aux étudiants d'appliquer ces résultats, pour le moment. Ils appaîtront dans le chapitre « Suites et séries de fonctions 2 », tout comme les propriétés portant sur la dérivabilité.

À venir. — § Fonctions vectorielles, § Calcul différentiel 1, § Structures algébriques, § Révisions sur les équations différentielles de MP2I, § Suites et séries de fonctions 2.

3. Questions de cours

Les références indiquées renvoient au polycopié de cours « Suites et séries de fonctions 1 ».

1. Définition de la convergence simple d'une suite de fonctions [énoncé, définition 1]. Définition de la convergence uniforme d'une suite de fonctions [énoncé, définition 5]. Explication orale de ce qui distingue les deux concepts précédents, en prenant appui sur les écritures formelles. Expression de la convergence uniforme d'une suite de fonctions à l'aide de la norme $||\cdot||_\infty$ [énoncé et figure, proposition 10].
2. La suite de fonctions
$$\left(f_n \;\middle|\; \begin{array}{ccc} [0,1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array} \right)_{n\in\mathbf{N}}$$
converge simplement sur $[0,1[$, uniformément sur tout segment de $[0,1[$, mais pas uniformément sur l'intervalle $[0,1[$ [démonstration, exercice 16].
3. Un critère séquentiel de non-convergence uniforme [énoncé et démonstration, proposition 14].
4. Définition de la convergence simple d'une série de fonctions [énoncé, définition 39]. Définition de la convergence uniforme d'une série de fonctions [énoncé, définition 43]. Convergence uniforme d'une série de fonctions à l'aide de la suite des restes [énoncé, proposition 45].
5. La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$, où pour tout $n\in\mathbf{N}^*$
$$f_n \left| \begin{array}{ccc}]-1,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^n \end{array} \right.$$
converge uniformément sur tout segment de $]-1,1]$, mais ne converge pas uniformément sur $]-1,1]$ [démonstration, exercice 48].
6. La convergence normale d'une série de fonctions implique sa convergence simple absolue [énoncé et démonstration, proposition 55]. La convergence normale d'une série de fonctions implique sa convergence uniforme [énoncé et démonstration, théorème 56].
7. Exemple d'une série de fonctions convergeant uniformément, mais non-normalement [énoncé et démonstration, contre-exemple suivant le théorème 56].
8. Approximation uniforme par des fonctions en escalier [énoncé général et démonstration dans le cas continu, théorème 63].
9. Si a, b sont des réels tels que $a<b$ et $f\in\mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})$ alors
$$\int_a^b f(t)\,\sin(nt)\;\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
[démonstration, exercice 64].
10. Théorème de Weierstraß [énoncé, théorème 65]. Si a, b sont des réels tels que $a<b$ et $f\in\mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})$ est une fonction telle que
$$\forall\, n\in\mathbf{N} \qquad \int_a^b x^n\, f(x)\;\mathrm{d}x = 0$$
alors $f = 0_{\mathbf{R}^{[a,b]}}$ [démonstration à l'aide d'un prolongement d'identité par continuité-densité, exercice 65].

4. Exercices de la banque CCINP à étudier

Des corrigés, rédigés par David Delaunay, sont disponibles.

Exercice de la banque CCINP n°8. —

1. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite décroissante positive de limite nulle.*
   (a) *Démontrer que la série* $\sum (-1)^k u_k$ *est convergente. On pourra considérer* $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *avec* $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.
   (b) *Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série* $\sum (-1)^k u_k$.
2. *On pose*
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n \, e^{-nx}}{n}$$
   (a) *Étudier la convergence simple sur* $\mathbb{R}$ *de la série de fonctions* $\sum_{n\geqslant 1} f_n$.
   (b) *Étudier la convergence uniforme sur* $[0,+\infty[$ *de la série de fonctions* $\sum_{n\geqslant 1} f_n$.

Exercice de la banque CCINP n°9. —

1. *Soit* X *un ensemble,* (g_n) *une suite de fonctions de* X *dans* $\mathbb{C}$ *et* g *une fonction de* X *dans* $\mathbb{C}$. *Donner la définition de la convergence uniforme sur* X *de la suite de fonctions* (g_n) *vers la fonction* g.
2. *On pose* $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \cos(\sqrt{n}x)$.
   (a) *Étudier la convergence simple de la suite de fonctions* (f_n).
   (b) *La suite de fonctions* (f_n) *converge-t-elle uniformément sur* $[0,+\infty[$ *?*
   (c) *Soit* $a > 0$. *La suite de fonctions* (f_n) *converge-t-elle uniformément sur* $[a,+\infty[$ *?*
   (d) *La suite de fonctions* (f_n) *converge-t-elle uniformément sur* $]0,+\infty[$ *?*

Exercice de la banque CCINP n°11. —

1. *Soit* X *une partie de* $\mathbb{R}$, (f_n) *une suite de fonctions de* X *dans* $\mathbb{R}$ *convergeant simplement vers une fonction* f. *On suppose qu'il existe une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* X *telle que la suite* $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *ne tende pas vers* 0. *Démontrer que la suite de fonctions* (f_n) *ne converge pas uniformément vers* f *sur* X.
2. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on pose* $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.
   (a) *Étudier la convergence simple de la suite* (f_n).
   (b) *Étudier la convergence uniforme de la suite* (f_n) *sur* $[a,+\infty[$ *(avec* $a > 0$*), puis sur* $]0,+\infty[$.

Exercice de la banque CCINP n°15. — *Soit* X *une partie de* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

1. *Soit* $\sum f_n$ *une série de fonctions définies sur* X *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *Rappeler la définition de la convergence normale de* $\sum f_n$ *sur* X, *puis celle de la convergence uniforme de* $\sum f_n$ *sur* X.
2. *Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *normalement convergente sur* X *est uniformément convergente sur* X.
3. *La série de fonctions* $\sum \dfrac{n^2}{n!} z^n$ *est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre* 0 *et de rayon* $R \in \mathbb{R}_+^*$ *?*

Exercice de la banque CCINP n°17. — *Soit $A \subset \mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.*

1. *Démontrer l'implication*

$$\Big(\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } A\Big)$$
$$\Downarrow$$
$$(\text{la suite de fonctions } (f_n) \text{ converge uniformément vers 0 sur } A)$$

2. *On pose*

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, x \in [0;+\infty[\quad f_n(x) = nx^2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$$

Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0;+\infty[$. $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0;+\infty[$? Justifier.

Exercice de la banque CCINP n°53 (tronqué). — *On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^4x^4}$.*

1. *Prouver que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On pose alors*

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

2. *Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$. $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a,b]$? sur $[a,+\infty[$?*

3. *$\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0,+\infty[$?*
