

Programme de la colle n°12 (20-24 janvier)

Structures algébriques

1. Déroulement de la colle	1
2. Programme	1
3. Questions de cours	1

1. Déroulement de la colle

La colle comporte trois phases, pour les élèves de MPI et les élèves de MPI*.

1. Rédaction d'une question de cours, parmi celles listées ci-dessous (5 points, 10 minutes maximum).
2. Résolution d'un système de congruences simultanées de la forme

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{n_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{n_2} \\ x \equiv a_3 \pmod{n_3} \end{cases}$$

où $a_1, a_2, a_3, n_1, n_2, n_3$ sont des entiers choisis par l'examinatrice/teur et $x \in \mathbf{Z}$ est l'inconnue (5 points, 10 minutes maximum).

3. Résolution d'exercices proposés par l'examinatrice/teur (10 points) .

2. Programme

§ Structures algébriques. — rappels sur les groupes, rappels sur les sous-groupes, rappels sur les morphismes de groupes, sous-groupes additifs de \mathbf{Z} , sous-groupe engendré par une partie d'un groupe, groupe $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +)$, classification des groupes monogènes, théorème de Lagrange (HP), ordre d'un élément d'un groupe, rappels sur les anneaux, rappels sur les sous-anneaux, rappels sur les morphismes d'anneaux, compléments sur les anneaux, idéaux de \mathbf{Z} , anneau $(\mathbf{Z}, n\mathbf{Z}, +, \times)$, anneau $(\mathbf{K}[X], +, \times)$, \mathbf{K} -algèbres.

Les thèmes



- description des irréductibles de $\mathbf{C}[X]$;
- description des irréductibles de $\mathbf{R}[X]$;
- \mathbf{K} -algèbres

seront présentés lundi matin en classe. Les élèves collés lundi ne seront pas interrogés sur ces derniers.

À venir. — § Suites et séries de fonctions 2, § Réduction des endomorphismes 2, § Séries entières, § Théorèmes de Lebesgue.

3. Questions de cours

Les références indiquées renvoient au [polycopié de cours « Structures algébriques »](#)

1. Si $a \in \mathbf{Z}$, propriété remarquable de l'ensemble $a\mathbf{Z}$ des multiples entiers de a [proposition 46, énoncé et démonstration]. Description des sous-groupes additifs de \mathbf{Z} [théorème 47, énoncé et démonstration].
2. Définition de l'ensemble $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ [définition 76]. Structure de groupe additif sur $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ [théorème 77, énoncé intégral et démonstration du caractère bien défini de la loi]. Générateurs du groupe $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +)$ [proposition 79, énoncé et démonstration].
3. Classification des groupes monogènes [théorème 89, énoncé et démonstration].
4. Ordre d'un élément g d'un groupe et sous-groupe $\langle g \rangle$ engendré par celui-ci [proposition 95, énoncé]. Propriété de divisibilité de l'ordre d'un élément [proposition 103, énoncé et démonstration]. Propriété de l'ordre d'un élément d'un groupe fini [théorème 104, énoncé].

5. Structure d'anneau sur $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ [théorème 147, énoncé]. Inversibles de l'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ [théorème 150, énoncé et démonstration]. Critère pour que $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ soit un corps [corollaire 153, énoncé].
6. Théorème des restes chinois [théorème 160, énoncé et démonstration].
7. Définition de l'indicatrice d'Euler [définition 164]. Théorème d'Euler [théorème 165, énoncé et démonstration]. Petit théorème de Fermat [remarque 166, énoncé].
8. Calcul de l'indicatrice d'Euler [théorème 168, énoncé et démonstration].
9. Caractérisation des idéaux d'un anneau commutatif [proposition 134, énoncé]. Description des idéaux de $\mathbf{K}[X]$ [théorème 173, énoncé et démonstration].
10. Définition d'un polynôme de $\mathbf{K}[X]$ irréductible sur \mathbf{K} [définition 177]. Un polynôme de $\mathbf{K}[X]$ de degré 2 ou 3 est irréductible sur \mathbf{K} si et seulement s'il ne possède aucune racine dans \mathbf{K} [exercice 179, résolution]. Exemple d'un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ de degré 4, sans racine réelle, mais réductible sur \mathbf{R} .