Programme de la colle n°3 (30 septembre - 4 octobre)

Réduction des endomorphismes et des matrices 1

1. Déroulement de la colle

Étudiants de MPI

La colle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (5 points, 10 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un des exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document (5 points, 15 minutes maximum) : ils auront été travaillés en amont de la colle et les solutions seront exposées avec dynamisme. L'accent sera mis sur la compréhension des concepts et, jamais, on ne récitera un corrigé non compris.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (10 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

Étudiants de MPI*

La colle comporte deux phases.

1. Rédaction d'une question de cours (5 points, 10 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (15 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

N.B. : Les étudiants de MPI* auront impérativement étudié les exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document.

2. Programme

§ Réduction des endomorphismes et des matrices 1. — *Compléments d'algèbre linéaire, éléments propres d'un endomorphisme, éléments propres d'une matrice carrée, polynôme caractéristique, diagonalisabilité, trigonalisabilité, nilpotence.*

Les polynômes d'endomorphismes/de matrices n'ont encore été présentés. Le lemme des noyaux, les polynômes annulateurs, le théorème de Cayley-Hamilton et les sous-espaces caractéristiques ne sont pas au menu de cette colle. Les résultats sur la réduction des endomorphismes induits n'y figurent pas non plus.

À venir. — § Espaces vectoriels normés I, § Fonctions de la variable réelle à valeurs dans $\mathbf{R}$ (révisions de MP2I)

3. Questions de cours

Les références indiquées renvoient au polycopié de cours « Réduction des endomorphismes et des matrices 1 ».

1. Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs [énoncé 12 et démonstration].
2. Propriété d'une somme de sous-espaces propres [énoncé 44 et démonstration].
3. Degré et coefficients remarquables du polynôme caractéristique [énoncé 68 et démonstration]. Valeurs propres versus racines du polynôme caractéristique [énoncé 70 et démonstration].
4. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit [énoncé 77 et démonstration]. Dimension d'un sous-espace propre et ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante [énoncé 79 et démonstration].
5. Caractérisation de la diagonalisabilité *via* la somme des sous-espaces propres [énoncé 93 et démonstration]. Caractérisation de la diagonalisabilité *via* la somme des dimensions des sous-espaces propres [énoncé 95].

6. Caractérisation de la trigonalisabilité *via* le polynôme caractéristique [énoncé 111 et démonstration].
7. Majoration du nilindice d'un endomorphisme nilpotent [énoncé 120 et démonstration].
8. Caractérisation de la nilpotence [énoncé 121 et démonstration].

4. Exercices de la banque CCINP à étudier

Exercice de la banque CCINP n°67. — *Soit* $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$, *où* $a, b, c \in \mathbf{R}$.

1. *M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$?*
2. *M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$?*

Exercice de la banque CCINP n°69. — *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *où a est un réel.*

1. *Déterminer le rang de A.*
2. *Pour quelles valeurs de a, la matrice A est-elle diagonalisable ?*

Exercice de la banque CCINP n°72. — *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, soit $f \in \mathcal{L}(E)$, soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On suppose que $f(e_1) = \ldots = f(e_n) = v$, où v est un vecteur donné de E.*

1. *Donner le rang de f.*
2. *L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?*

Exercice de la banque CCINP n°73. —

1. *Posons* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. *Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.*
2. *Déterminer les matrices qui commutent avec la matrice* $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. *En déduire l'ensemble des matrices qui commutent avec A est* $\mathrm{Vect}\,(I_2, A)$.

Exercice de la banque CCINP n°74. — *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) *Justifier sans calcul que A est diagonalisable.*
   (b) *Déterminer les valeurs propres de A puis une base de vecteurs propres associés.*
2. *On considère le système différentiel* $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$, *$x, y, z$ désignant trois fonctions de la variable t, dérivables sur* $\mathbf{R}$. *En utilisant la question 1. et en le justifiant, résoudre ce système.*

Exercice de la banque CCINP n°83. — *Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E.*

1. *Soit λ un réel non nul. Prouver que si λ est valeur propre de $u \circ v$, alors λ est valeur propre de $v \circ u$.*
2. *On considère, sur $E = \mathbf{R}[X]$ les endomorphismes u et v définis par :*

$$u \colon P \longmapsto \int_1^X P \qquad \text{et} \qquad v \colon P \longmapsto P'$$

   Déterminer $\mathrm{Ker}(u \circ v)$ *et* $\mathrm{Ker}(v \circ u)$. *Le résultat de la question 1. reste-t-il vrai pour $\lambda = 0$?*
3. *Si E est de dimension finie, démontrer que le résultat de la première question reste vrai pour $\lambda = 0$. On pourra penser à utiliser le déterminant.*
