Programme de la colle n°8 (9-13 décembre)

Procédés sommatoires discrets

1. Déroulement de la colle

Étudiants de MPI

La colle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (5 points, 10 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un des exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document (5 points, 15 minutes maximum) : ils auront été travaillés en amont de la colle et les solutions seront exposées avec dynamisme. L'accent sera mis sur la compréhension des concepts et, jamais, on ne récitera un corrigé non compris.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (10 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

Étudiants de MPI*

La colle comporte deux phases.

1. Rédaction d'une question de cours (5 points, 10 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (15 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

N.B. : Les étudiants de MPI* auront impérativement étudié les exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document.

2. Programme

Notation. — La lettre $\mathbf{K}$ désigne le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

§ Procédés sommatoires discrets. — *séries à valeurs dans un espace vectoriel normé, séries à termes réels positifs ou nuls, technique de comparaison série-intégrale, séries absolument convergentes, exponentielle d'un endomorphisme d'un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel de dimension finie, exponentielle d'une matrice, règle de d'Alembert, critère des séries alternées, transformation d'Abel (HP), sommation des relations de comparaison, developpement asymptotique des sommes partielles de la série harmonique (HP), théorème de Cesàro, familles sommables de réels positifs, familles sommables de nombres complexes.*

À venir. — § Probabilités 1, § Suites et séries de fonctions 1, § Fonctions de la variable réelle à valeurs vectorielles, § Calcul différentiel 1, § Structures algébriques.

3. Questions de cours

Les références indiquées renvoient au polycopié de cours « Procédés sommatoires discrets ».

1. Théorème de comparaison série-intégrale [énoncé, schéma et démonstration du théorème 22 présentée dans le polycopié]. Nature de la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$.

2. Théorème de comparaison pour les séries numériques [énoncé et démonstration du théorème 34]. Nature de la série numérique $\sum_{n \geqslant 2} \frac{x^n}{\ln(n)}$, où $x \in \mathbf{R}$.
3. Exponentielle d'une matrice [définition 36]. Exponentielle de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ [calcul, cf. exemple 41].
4. Critère des séries alternées, avec signe et majoration du reste [énoncé et démonstration du théorème 53].
5. Règle de d'Alembert [énoncé et démonstration du théorème 48 dans le cas $\ell < 1$]. Nature de la série numérique $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n \ln^2(n)}$.
6. Pour tout $\alpha > 1$, détermination d'un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ lorsque n tend vers $+\infty$ [calcul, cf. exercice 26]. Nature de la série numérique $\sum_{n \geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$.
7. Théorème de sommation des o pour les séries [énoncé du théorème 59]. Théorème de sommation des équivalents pour les séries [énoncé et démonstration du théorème 61 du polycopié].
8. Somme d'une famille de réels positifs [définition 67]. Somme d'une famille de réels positifs indexée par $\mathbf{N}$ [énoncé et démonstration de la proposition 70].
9. Partition d'un ensemble [définition 79]. Théorème de sommation par paquets dans le cas complexe [énoncé du théorème 109]. Expression de la somme de la famille $\left(\frac{1}{(n+m)^4}\right)_{(n,m) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*}$ à l'aide de la fonction ζ de Riemann [calcul, cf. exercice 91].
10. Théorème de Fubini dans le cas complexe [énoncé du théorème 110]. Convergence et somme de la série numérique $\sum_{p \geqslant 2} (\zeta(p) - 1)$ [calcul, cf. exercice 97].

4. Exercices de la banque CCINP à étudier

Des corrigés, rédigés par David Delaunay, sont disponibles.

Exercice de la banque CCINP n°5. —

1. *On considère la série de terme général* $u_n = \frac{1}{n\,(\ln n)^\alpha}$ *où* $n \geqslant 2$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (a) Cas $\alpha \leqslant 0$. *En utilisant une minoration très simple de* u_n, *démontrer que la série diverge.*
   (b) Cas $\alpha > 0$. *Étudier la nature de la série. On pourra utiliser la fonction* $f : x \longmapsto \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.
2. *Déterminer la nature de la série* $\sum_{n \geqslant 2} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

Exercice de la banque CCINP n°6. — *Soit* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de réels strictement positifs et* ℓ *un réel positif strictement inférieur à 1.*

1. *Démontrer que si* $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, *alors la série* $\sum u_n$ *converge. On pourra écrire, judicieusement, la définition de* $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, *puis majorer, pour* n *assez grand,* u_n *par le terme général d'une suite géométrique.*
2. *Quelle est la nature de la série* $\sum_{n \geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$ *?*

Exercice de la banque CCINP n°7. —

1. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles telles que* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est non nulle à partir d'un certain rang.*
   (a) *Prouver que si* $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ *alors* u_n *et* v_n *sont de même signe à partir d'un certain rang.*
   (b) *Dans cette question, on suppose que* (v_n) *est positive. Prouver que :*
$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n \textit{ et } \sum v_n \textit{ sont de même nature}$$
2. *Étudier la convergence de la série* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{((-1)^n + \mathrm{i})\sin\left(\frac{1}{n}\right)\ln n}{(\sqrt{n+3}-1)}$. *Le symbole* i *désigne le nombre complexe de carré égal à* -1.

Exercice de la banque CCINP n°46. — *On considère la série :* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1. *Prouver que, au voisinage de* $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \alpha\dfrac{\pi}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ *où* α *est un réel que l'on déterminera.*
2. *En déduire que* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ *converge.*
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ *converge-t-elle absolument ?*

Exercice de la banque CCINP n°54. — *Soit* E *l'ensemble des suites à valeurs réelles qui convergent vers* 0.

1. *Prouver que* E *est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles.*
2. *On pose, pour tout* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $||u|| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
   (a) *Prouver que* $||\,.\,||$ *est une norme sur* E.
   (b) *Prouver que, pour tout* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $\displaystyle\sum \frac{u_n}{2^{n+1}}$ *converge.*
   (c) *On pose, pour tout* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $f(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}$. *Prouver que* f *est continue sur* E.
