Programme de la colle n°9 (16-20 décembre)

Probabilités 1

1. Déroulement de la colle

Étudiants de MPI

La colle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (5 points, 10 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un des exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document (5 points, 15 minutes maximum) : ils auront été travaillés en amont de la colle et les solutions seront exposées avec dynamisme. L'accent sera mis sur la compréhension des concepts et, jamais, on ne récitera un corrigé non compris.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (10 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

Étudiants de MPI*

La colle comporte deux phases.

1. Rédaction d'une question de cours (5 points, 10 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (15 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

N.B. : Les étudiants de MPI* auront impérativement étudié les exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document.

2. Programme

§ Révisions de probabilités de MP2I — *loi uniforme sur un ensemble fini non vide, loi de Bernoulli, loi binomiale.*

§ Probabilités 1 — *ensembles dénombrables, tribu et espace probabilisable, probabilité et espace probabilisé, probabilités conditionnelles, événements indépendants, suite infinie de lancers de pièce ou motivation pour l'introduction des tribus (HP), variable aléatoire discrète et loi d'une telle, indépendance de variables aléatoires, loi de Poisson, loi géométrique.*

Les notions d'espérance, de variance et de covariance, les inégalités probabilistes et les fonctions génératrices **ne figurent pas** au programme de cette colle.

À venir. — § Suites et séries de fonctions 1, § Fonctions vectorielles, § Calcul différentiel 1, § Structures algébriques.

3. Questions de cours

Les références indiquées renvoient au polycopié de cours « Probabilités 1 ».

1. Dénombrabilité de $\mathbf{Q}$ [démonstration de la proposition 16]. Théorème de Cantor [énoncé et démonstration du théorème 19]. L'ensemble $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ n'est pas dénombrable [démonstration du corollaire 21].
2. Continuité monotone d'un probabilité [énoncé et démonstration du théorème 42].
3. Probabilité d'une union/intersection dénombrable d'événements [énoncé et démonstration du corollaire 43].
4. Formule des probabilités composées [énoncé et démonstration du théorème 51]. Formule de Bayes [énoncé de la proposition 59].
5. Définition d'un système quasi-complet d'événements [définition 53]. Formule des probabilités totales [énoncé et démonstration du théorème 46].
6. Loi d'une variable aléatoire discrète [énoncé et démonstration du théorème 76]. Distribution de probabilités d'une variable aléatoire discrète [énoncé de la proposition 77].
7. Formule pour les lois marginales [énoncé et démonstration de la proposition 90].
8. Définition d'une variable aléatoire discrète suivant une loi de Poisson [définition 105]. Somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson [cf. exercice 109].
9. Définition d'une variable aléatoire discrète suivant une loi géométrique [définition 112]. Situation de reconnaissance d'une loi géométrique [énoncé de la proposition 113 et justification présentée dans l'heuristique 10.1].

4. Exercices de la banque CCINP à étudier

Des corrigés, rédigés par David Delaunay, sont disponibles.

Exercice de la banque CCINP n°97 (tronqué). — *Soit* (X,Y) *un couple de variables aléatoires à valeurs dans* $\mathbf{N}^2$ *dont la loi est donnée par*

$$\forall (j,k)\in\mathbf{N}^2 \quad \mathbf{P}\left((X,Y)=(j,k)\right)=\frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}$$

1. *Déterminer les lois marginales de* X *et de* Y.
2. *Les variables* X *et* Y *sont-elles indépendantes ?*

Exercice de la banque CCINP n°102 (tronqué). — *Soit* $N\in\mathbb{N}^*$. *Soit* $p\in\,]0,1[$. *On pose* $q=1-p$. *On considère* N *variables aléatoires* $X_1,X_2,\cdots,X_N$ *définies sur un même espace probabilisé* $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$, *indépendantes et de même loi géométrique de paramètre* p.

1. *Soit* $i\in[\![1,N]\!]$. *Soit* $n\in\mathbf{N}^*$. *Déterminer* $\mathbf{P}(X_i\leqslant n)$, *puis* $\mathbf{P}(X_i>n)$.
2. *On considère la variable aléatoire* Y *définie par* $Y=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant N}(X_i)$, *c'est-à-dire*

$$\forall\,\omega\in\Omega \quad Y(\omega)=\min\left(X_1(\omega),\cdots,X_N(\omega)\right)$$

où min *désigne « le plus petit élément de ».*

   (a) *Soit* $n\in\mathbf{N}^*$. *Calculer* $\mathbf{P}(Y>n)$. *En déduire* $\mathbf{P}(Y\leqslant n)$, *puis* $\mathbf{P}(Y=n)$.
   (b) *Reconnaître la loi de* Y.

Exercice de la banque CCINP n°103 (tronqué). — *Soit* $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$ *un espace probabilisé.*

1. *Soit* $(\lambda_1, \lambda_2) \in \,]0, +\infty[^2$. *Soit* X_1 *et* X_2 *deux variables aléatoires définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. *On suppose que* X_1 *et* X_2 *sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de paramètres respectifs* λ_1 *et* λ_2. *Déterminer la loi de* $X_1 + X_2$.
2. *Soit* $p \in \,]0, 1]$. *Soit* $\lambda \in \,]0, +\infty[$. *Soit* X *et* Y *deux variables aléatoires définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. *On suppose que* Y *suit une loi de Poisson de paramètre* λ. *On suppose que* $X(\Omega) = \mathbf{N}$ *et que, pour tout* $m \in \mathbf{N}$, *la loi conditionnelle de* X *sachant* $(Y = m)$ *est une loi binomiale de paramètre* (m, p). *Déterminer la loi de* X.

Exercice de la banque CCINP n°106 (tronqué). — *X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans* $\mathbf{N}$. *Elles suivent la même loi définie par*

$$\forall\, k \in \mathbf{N} \quad \mathbf{P}\,(X = k) = \mathbf{P}\,(Y = k) = p\, q^k$$

où $p \in \,]0, 1[$ *et* $q = 1 - p$. *On considère alors les variables* U *et* V *définies par* $U = \sup(X, Y)$ *et* $V = \inf(X, Y)$.

1. *Déterminer la loi du couple* (U, V).
2. *Déterminer la loi marginale de* U. *On admet que* $V(\Omega) = \mathbf{N}$ *et que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \mathbf{P}\,(V = n) = p\, q^{2n}\,(1 + q)$$

3. *Prouver que* $W = V + 1$ *suit une loi géométrique.*
4. U *et* V *sont-elles indépendantes ?*

Exercice de la banque CCINP n°108 (tronqué). — *Soient* X *et* Y *deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ *et à valeurs dans* $\mathbf{N}$. *On suppose que la loi du couple* (X, Y) *est donnée par*

$$\forall\, (i, j) \in \mathbf{N}^2 \quad \mathbf{P}\,((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{1}{\mathrm{e}\; 2^{i+1} j!}$$

1. *Déterminer les lois de* X *et de* Y.
2. *Prouver que* $1 + X$ *suit une loi géométrique.*
3. *Les variables* X *et* Y *sont-elles indépendantes ?*
4. *Calculer* $\mathbf{P}\,(X = Y)$.

Exercice de la banque CCINP n°111 (tronqué). — *On admet que, pour tout* $q \in \mathbb{N}$, *pour tout* $x \in \,]-1, 1[$, *la série* $\displaystyle\sum_{k \geqslant q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ *converge et que*

$$\sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}$$

Soit $p \in \,]0, 1[$. *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ *un espace probabilisé. Soit* X *et* Y *deux variables aléatoires définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ *et à valeurs dans* $\mathbf{N}$. *On suppose que la loi de probabilité du couple* (X, Y) *est donnée par*

$$\forall\, (k, n) \in \mathbf{N}^2 \quad \mathbf{P}\,((X = k) \cap (Y = n)) = \begin{cases} \dbinom{n}{k} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. *Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.*
2. (a) *Déterminer la loi de* Y.
   (b) *Prouver que* $1 + Y$ *suit une loi géométrique.*
3. *Déterminer la loi de* X.
