Programme de la colle n°7 (25-29 novembre)

Espaces vectoriels normés 3

1. Déroulement de la colle

Étudiants de MPI

La colle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (5 points, 10 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un des exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document (5 points, 15 minutes maximum) : ils auront été travaillés en amont de la colle et les solutions seront exposées avec dynamisme. L'accent sera mis sur la compréhension des concepts et, jamais, on ne récitera un corrigé non compris.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (10 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

Étudiants de MPI*

La colle comporte deux phases.

1. Rédaction d'une question de cours (5 points, 10 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (15 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

N.B. : Les étudiants de MPI* auront impérativement étudié les exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document.

2. Programme

Notation. — La lettre $\mathbf{K}$ désigne le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

§ Espaces vectoriels normés 1. — *Normes et espaces vectoriels normés, suites d'éléments d'un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel normé, topologie d'un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel normé, étude locale d'une application, continuité.*

§ Espaces vectoriels normés 2. — *Parties compactes d'un espace vectoriel normé, applications continues sur une partie compacte, connexité par arcs.*

§ Espaces vectoriels normés 3. — *Applications linéaires continues, comparaison de normes, espaces vectoriels normés de dimension finie.*

À venir. — § Procédés sommatoires discrets, § Suites et séries de fonctions 1, § Fonctions de la variable réelle à valeurs vectorielles, § Calcul différentiel 1.

3. Questions de cours

Les références indiquées renvoient au polycopié de cours « Espaces vectoriels normés 3 ».

1. Caractérisation des applications linéaires continues [énoncé et démonstration du théorème 1].
2. Norme subordonnée d'une application linéaire continue et norme sur l'espace des applications linéaires continues [énoncé et démonstration de la proposition 8].
3. Inégalités pour les normes subordonnées des applications linéaires continues [énoncés et démonstrations des proposition 13 et théorème 14].
4. Caractérisation de la continuité des applications multilinéaires [énoncé et démonstration de la proposition 15].
5. Critère séquentiel de comparaison des normes [énoncé et démonstration du théorème 22]. Critère séquentiel pour l'équivalence de deux normes [énoncé du corollaire 23].
6. Propriétés topologiques invariantes et équivalences de normes [énoncé intégral du corollaire 27 et démonstration du polycopié en ligne pour les ouverts].
7. Propriété topologique du groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ [énoncé et démonstration présentés dans l'exercice 36 du polycopié en ligne].
8. Convergence d'une suite dans un espace de dimension finie [énoncé et démonstration de la proposition 34].
9. Propriété topologique d'un sous-espace vectoriel de dimension finie F d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé (E, N) non nécessairement de dimension finie [énoncé et démonstration du théorème 38].
10. Calcul de la norme subordonnée d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, lorsque $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ est muni de la norme $|| \cdot ||_\infty$ [cf. exercice résolu en classe].

4. Exercices de la banque CCINP à étudier

Des corrigés, rédigés par David Delaunay, sont disponibles.

Exercice de la banque CCINP n°1. — *On note E l'espace vectoriel des applications continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose : $\forall f \in E$, $||f||_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$ et $||f||_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$.*

1. *Les normes $||\ ||_\infty$ et $||\ ||_1$ sont-elles équivalentes ? Justifier.*
2. *Dans cette question, on munit E de la norme $||\ ||_\infty$.*
   (a) *Soit $u : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(0) \end{array} \right.$ Prouver que u est une application continue sur E.*
   (b) *On pose $F = \{f \in E \ / \ f(0) = 0\}$. Prouver que F est une partie fermée de E pour la norme $||\ ||_\infty$.*
3. *Dans cette question, on munit E de la norme $||\ ||_1$. Soit $c : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array} \right.$ On pose :*
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(x) = \begin{cases} nx & si \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ 1 & si \quad \frac{1}{n} < x \leqslant 1 \end{cases}$$
   (a) *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $||f_n - c||_1$.*
   (b) *On pose $F = \{f \in E \ / \ f(0) = 0\}$. On note $\bar{F}$ l'adhérence de F. Prouver que $c \in \bar{F}$. F est-elle une partie fermée de E pour la norme $||\ ||_1$?*

Exercice de la banque CCINP n°36. — *Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$. On note $|| \, ||_E$ (respectivement $|| \, ||_F$) la norme sur E (respectivement sur F).*

1. *Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F, alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :*

   P1. *f est continue sur E.*
   P2. *f est continue en 0_E.*
   P3. *$\exists k > 0$ tel que : $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leqslant k \|x\|_E$.*

2. *Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$. On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$.*

   Démontrer que φ est linéaire et continue.

Exercice de la banque CCINP n°37. — *On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.*
On pose : $\forall\, f \in E$, $N_\infty(f) = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt$.

1. *(a) Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.*
   (b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leq kN_\infty(f)$.
   (c) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.
2. *Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.*

Exercice de la banque CCINP n°38. —

1. *On se place sur $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, muni de la norme $|| \, ||_1$ définie par : $\forall\, f \in E$, $||f||_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt$.*
   Soit $u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & u(f) = g \end{array}$ avec $\forall\, x \in [0,1]$, $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$. On admet que u est un endomorphisme de E.
   *Prouver que u est continue et calculer $|||u|||$. **Indication** : considérer, pour tout entier n non nul, la fonction f_n définie par $f_n(t) = n\mathrm{e}^{-nt}$.*
2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ un n-uplet **non nul, fixé**.*
   Soit $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, ..., x_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i x_i \end{array}$.

   (a) Justifier que u est continue quel que soit le choix de la norme sur $\mathbb{R}^n$.
   (b) On munit $\mathbb{R}^n$ de $|| \, ||_2$ où $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $||x||_2 = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k^2}$. Calculer $|||u|||$.
3. *Déterminer un espace vectoriel E, une norme sur E et un endomorphisme de E non continu pour la norme choisie. Justifier.*

Remarque *: Les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes.*

Exercice de la banque CCINP n°39. — *On note l^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.*

1. *(a) Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge. On pose alors $(x|y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.*

(b) Démontrer que l^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

Dans la suite de l'exercice, on admet que $(\,|\,)$ est un produit scalaire dans l^2. On suppose que l^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée, notée $||\,||$.

2. *Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x = (x_n) \in l^2$, on pose $\varphi(x) = x_p$. Démontrer que φ est une application linéaire et continue de l^2 dans $\mathbb{R}$.*

3. *On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes.*
   Déterminer $F^\perp$ (au sens de $(\,|\,)$). Comparer F et $\left(F^\perp\right)^\perp$.
