Programme de la colle n°5 (4-9 novembre)

Espaces vectoriels normés 2

1. Déroulement de la colle

Étudiants de MPI

La colle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (5 points, 10 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un des exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document (5 points, 15 minutes maximum) : ils auront été travaillés en amont de la colle et les solutions seront exposées avec dynamisme. L'accent sera mis sur la compréhension des concepts et, jamais, on ne récitera un corrigé non compris.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (10 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

Étudiants de MPI*

La colle comporte deux phases.

1. Rédaction d'une question de cours (5 points, 10 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (15 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

N.B. : Les étudiants de MPI* auront impérativement étudié les exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document.

2. Programme

Notation. — La lettre $\mathbf{K}$ désigne le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

§ Espaces vectoriels normés 1. — *Normes et espaces vectoriels normés, suites d'éléments d'un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel normé, topologie d'un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel normé, étude locale d'une application, continuité.*

§ Espaces vectoriels normés 2. — *Parties compactes d'un espace vectoriel normé, applications continues sur une partie compacte, connexité par arcs.*

Les notions suivantes n'ont pas encore été abordées : comparaison des normes, applications linéaires et multilinéaires continues, espaces vectoriels normés de dimension finie.

À venir. — § Intégration sur un intervalle quelconque, § Espaces vectoriels normés 3, § Procédés sommatoires discrets.

3. Questions de cours

Les références indiquées renvoient au polycopié de cours « Espaces vectoriels normés 2 ».

1. Deux conditions nécessaires pour qu'une partie d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé soit compacte [énoncé et démonstration de la proposition 7].
2. Une partie fermée et bornée d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé n'est pas nécessairement compacte [énoncé du contre-exemple 9 avec justification des caractères fermé, borné et non compact].
3. Caractérisation des parties compactes de $(\mathbf{R}^n, ||\cdot||_\infty)$ [énoncé et démonstration du théorème 13]. La partie $K = \left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \ : \ x^2+4y^2 \leqslant 4\right\}$ de $\left(\mathbf{R}^2, ||\cdot||_\infty\right)$ est compacte [résolution de l'exercice 14].

4. Propriété d'un fermé relatif d'une partie compacte d'un **K**-espace vectoriel normé [énoncé et démonstration de la proposition 18]. Les groupes $\mathrm{O}_n(\mathbf{R}) = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \ : \ A\,A^\top = I_n\right\}$ et $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R}) = \{A \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \ : \ \det(A) = 1\}$ sont des parties compactes de $(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), ||\cdot||_\infty)$ [résolution des exercices 17 et 19].
5. Produit d'un nombre fini de compacts [énoncé et démonstration du théorème 23].
6. Image continue d'un compact [énoncé et démonstration du théorème 26] et théorème des bornes atteintes [énoncé et démonstration du corollaire 27].
7. Fonction coercive : si une application $f\colon (\mathbf{R}^n, ||\cdot||_\infty) \longrightarrow (\mathbf{R}, |\cdot|)$ est continue et vérifie $f(x) \xrightarrow[||\,x\,||\to+\infty]{} +\infty$, alors f possède un minimum [résolution de la question 1 de l'exercice 32].
8. Définition d'une partie connexe par arcs d'un **K**-espace vectoriel normé. L'ensemble $\mathbf{C}^*$ est une partie connexe par arcs de $\mathbf{C}$ et $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ est une partie connexe par arcs de $(\mathcal{M}_n(\mathbf{C}), ||\cdot||_\infty)$.
9. Image continue d'une partie connexe par arcs [énoncé et démonstration du théorème 58]. $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ n'est pas une partie connexe par arcs de $(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), ||\cdot||_\infty)$ [résolution de l'exercice 43]. $\mathrm{SO}_2(\mathbf{R}) = \left\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \ : \ A\,A^\top = I_n \text{ et } \det(A) = 1\right\}$ est une partie connexe par arcs de $(\mathcal{M}_2(\mathbf{R}), ||\cdot||_\infty)$ [résolution de l'exercice 59].

4. Exercices de la banque CCINP à étudier

Exercice de la banque CCINP n°3. —

1. *On pose* $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ *et* $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$. *Calculer, pour tout entier naturel* k, *la dérivée d'ordre* k *des fonctions* g *et* h *sur leurs ensembles de définitions respectifs.*
2. *On pose* $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$. *En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée* $n^{\text{ième}}$ *d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel* n *et pour tout* $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, *la valeur de* $f^{(n)}(x)$.
3. *Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.*

Exercice de la banque CCINP n°4. —

1. *Énoncer le théorème des accroissements finis.*
2. *Soit* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *et soit* $x_0 \in \,]a,b[$. *On suppose que* f *est continue sur* $[a,b]$ *et que* f *est dérivable sur* $]a,x_0[$ *et sur* $]x_0,b[$. *Démontrer que, si* f' *admet une limite finie en* x_0, *alors* f *est dérivable en* x_0 *et* $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$.
3. *Prouver que l'implication : (* f *est dérivable en* x_0*)* $\Longrightarrow$ *(*f' *admet une limite finie en* x_0*) est fausse. On pourra considérer la fonction* g *définie par :* $g(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$ *si* $x \neq 0$ *et* $g(0) = 0$.

Exercice de la banque CCINP n°13. —

1. *Rappeler, oralement, la définition, par les suites de vecteurs, d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé.*
2. *Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie fermée de cet espace.*
3. *Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie bornée de cet espace.*
4. *On munit* $E = \mathbf{R}[X]$ *de la norme* $||\cdot||_1$ *définie pour tout polynôme* $P = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ *de* E *par* $||\,P\,||_1 = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} |a_i|$.
   (a) *Justifier que* $S(0,1) = \{P \in E \ : \ ||\,P\,||_1 = 1\}$ *est une partie fermée et bornée de* E.
   (b) *Calculer* $||\,X^n - X^m\,||_1$ *pour* m *et* n *des entiers naturels distincts.* $S(0,1)$ *est-elle une patie compacte de* E *? Justifier.*

Exercice de la banque CCINP n°43. — *Soit* $x_0 \in \mathbb{R}$. *On définit la suite* (u_n) *par* $u_0 = x_0$ *et*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \mathrm{Arctan}(u_n)$$

1. (a) *Démontrer que la suite* (u_n) *est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de* x_0, *le sens de variation de* (u_n).
   (b) *Montrer que* (u_n) *converge et déterminer sa limite.*
2. *Déterminer l'ensemble des fonctions* h, *continues sur* $\mathbb{R}$, *telles que, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\mathrm{Arctan}\, x)$.
