Programme de la colle n°4 (14-18 octobre)

Espaces vectoriels normés 1

1. Déroulement de la colle

Étudiants de MPI

La colle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (5 points, 10 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un des exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document (5 points, 15 minutes maximum) : ils auront été travaillés en amont de la colle et les solutions seront exposées avec dynamisme. L'accent sera mis sur la compréhension des concepts et, jamais, on ne récitera un corrigé non compris.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (10 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

Étudiants de MPI*

La colle comporte deux phases.

1. Rédaction d'une question de cours (5 points, 10 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (15 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

N.B. : Les étudiants de MPI* auront impérativement étudié les exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document.

2. Programme

Notation. — La lettre $\mathbf{K}$ désigne le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

§ Espaces vectoriels normés 1. — *Normes et espaces vectoriels normés, suites d'éléments d'un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel normé, topologie d'un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel normé, étude locale d'une application, continuité. On pourra consulter le sommaire du polycopié de cours « Espaces vectoriels normés » pour une présentation plus détaillée.*

Les notions suivantes n'ont pas encore été abordées : comparaison des normes, applications linéaires et multilinéaires continues, parties compactes d'un espace vectoriel normé, applications continues sur une partie compacte, connexité par arcs, espaces vectoriels normés de dimension finie.

À venir. — § Fonctions de la variable réelle à valeurs dans $\mathbf{R}$ (révisions de MP2I), § Espaces vectoriels normés II, Intégrales généralisées.

3. Questions de cours

Les références indiquées renvoient au polycopié de cours « Espaces vectoriels normés ».

1. Inégalité de Cauchy-Schwarz dans un espace préhilbertien réel [énoncé intégral et démonstration de l'inégalité de la proposition 4]. Norme associée à un produit scalaire [énoncé de la proposition 6].
2. Norme de la convergence uniforme sur un espace de fonctions bornées [énoncé et démonstration de la proposition 18] et représentation graphique d'une boule fermée dans $(\mathcal{B}([0,1],\mathbf{R}), ||\cdot||_\infty)$ [figure argumentée de l'exemple 28].
3. Définition d'un segment dans un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé [énoncé de la définition 31]. Définition d'une partie convexe d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé [énoncé de la définition 33]. Propriété de convexité des boules [énoncé et démonstration de la proposition 36].

4. Définition d'une suite convergente dans un espace vectoriel normé [énoncé de la définition 48]. Caractère borné d'une suite convergente [énoncé et démonstration de la proposition 54].
5. Convergence d'une suite dans un produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels normés [énoncé et démonstration du théorème 57].
6. Propriétés topologiques des boules [énoncé et démonstration du théorème 70].
7. Propriété de minimalité de l'adhérence [énoncé et démonstration du théorème 85].
8. Caractérisation séquentielle de l'adhérence et des fermés [énoncé et démonstration du théorème 87]. L'ensemble $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x = y\}$ est une partie fermée de $(\mathbf{R}^2, ||\cdot||_\infty)$ [résolution de l'exercice 88]
9. Propriété de maximalité de l'intérieur [énoncé et démonstration du théorème 102].
10. Caractérisation séquentielle de la notion de limite [énoncé et démonstration du théorème 119].
11. Caractérisation de la continuité d'une application *via* les ouverts [énoncé et démonstration du théorème 135].

4. Exercices de la banque CCINP à étudier

Exercice de la banque CCINP n°34. — *Soit A une partie non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E.*

1. *Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.*
2. *Soit $x \in E$. Démontrer que :*
$$x \in \bar{A} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbf{N}} \quad x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$$
3. *Démontrer que, si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\bar{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.*
4. *Démontrer que si A est convexe alors $\bar{A}$ est convexe.*

Exercice de la banque CCINP n°37. — *Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$. On pose, pour tout $f \in E$:*
$$N_\infty(f) = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)| \qquad et \qquad N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|dt$$

1. *Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.*
2. *Démontrer qu'il existe $\alpha \in \mathbf{R}_+$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leqslant \alpha\, N_\infty(f)$.*
3. *Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.*
4. *Démontrer qu'il n'existe aucune constante $\beta \in \mathbf{R}_+$ telle que, pour tout $f \in E$, $N_\infty(f) \leqslant \beta\, N_1(f)$.*

Exercice de la banque CCINP n°44. — *Soient E un espace vectoriel normé et A, B deux parties non vides de E.*

1. (a) *Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.*
   (b) *Démontrer que :*
$$A \subset B \quad \Longrightarrow \quad \overline{A} \subset \overline{B}$$
2. *Démontrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.*
3. (a) *Démontrer que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.*
   (b) *Démontrer, à l'aide d'un exemple, que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée. On pourra prendre $E = \mathbb{R}$.*

Exercice de la banque CCINP n°45. — *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et A une partie non vide de E. On note $\overline{A}$ l'adhérence de A.*

1. (a) *Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.*
   (b) *Prouver que, si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.*
2. *On pose, pour tout $x \in E$:*
$$\mathrm{d}_A(x) = \inf_{a\in A} ||\, x - a\,||$$
   (a) *Soit $x \in E$. Prouver que :*
$$\mathrm{d}_A(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \overline{A}$$
   (b) *On suppose que A est fermée et que :*
$$\forall\,(x,y) \in E^2 \quad \forall\, t \in [0,1] \quad \mathrm{d}_A(t\,x + (1-t)\,y) \leqslant t\ \mathrm{d}_A(x) + (1-t)\ \mathrm{d}_A(y)$$
   Prouver que A est convexe.
