Programme de la colle n°1 (16-20 septembre)

Dénombrement et probabilités de MP2I

1. Déroulement de la colle

Étudiants de MPI

La colle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (5 points, 10 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un des exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document (5 points, 15 minutes maximum) : ils auront été travaillés en amont de la colle et les solutions seront exposées avec dynamisme. L'accent sera mis sur la compréhension des concepts et, jamais, on ne récitera un corrigé non compris.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (10 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

Étudiants de MPI*

La colle comporte deux phases.

1. Rédaction d'une question de cours (5 points, 10 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (15 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

N.B. : Les étudiants de MPI* auront impérativement étudié les exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document.

2. Programme

§ Dénombrement. — *Définition d'un ensemble fini et du cardinal d'un tel ; Parties d'un ensemble fini ; Réunion disjointe d'ensembles finis ; Réunion d'ensembles finis ; Produit cartésien d'ensembles finis ; Ensemble des applications entre deux ensembles finis ; Critère de bijectivité pour une application entre deux ensembles finis ; Permutations d'un ensemble fini ; Ensemble des parties à p éléments d'un ensemble fini ; Ensembles des parties d'un ensemble fini ; Preuves combinatoires de la relation de Pascal et de la formule du binôme de Newton.*

§ Probabilités de MP2I. — *Probabilité sur un ensemble fini ; Distribution de probabilités sur un ensemble fini ; Probabilités conditionnelles ; Formule des probabilités composées ; Formule des probabilités totales ; Formule de Bayes ; Variable aléatoire et loi d'une telle ; Image d'une variable aléatoire par une application ; Loi conditionnelle d'une variable aléatoire ; Indépendance d'événements ; Loi conjointe et lois marginales pour un couple de variables aléatoires ; Indépendance de variables aléatoires ; Lemme des coalitions ; Espérance d'une variable aléatoire ; Formule de transfert ; Variance d'une variable aléatoire ; Covariance de deux variables aléatoires ; Inégalité de Markov ; Inégalité de Biénaymé-Tchebychev ; Loi uniforme sur un ensemble fini non vide ; Loi de Bernoulli ; Loi binomiale.*

À venir. — § Algèbre linéaire de MP2I, § Réduction des endomorphismes I, § Espaces vectoriels normés I

3. Questions de cours

Les références indiquées renvoient au polycopié de cours « Synthèse du cours de probabilités de MP2I ».

1. Probabillité sur un ensemble fini [énoncé (1)] ; Propriétés d'une probabilité [énoncé (5)].
2. Formule des probabilités composées [énoncé (8)] ; Définition d'un système complet d'événements [énoncé (9)] ; Formule des probabilités totales [énoncé (10)].
3. Formule de Bayes [énoncé (11)] ; La loi conjointe détermine la loi des marginales [énoncé (23)].

4. Lemme des coalitions [énoncé (27)] ; Espérance d'une variable aléatoire [énoncé (28)].
5. Formule de transfert [énoncé (30)] ; Propriétés de l'espérance [énoncé (31)].
6. Espérance du produit de variables aléatoires mutuellement indépendantes [énoncé (32)] ; Variance et écart-type d'une variable aléatoire [énoncé (33)].
7. Covariance de deux variables aléatoires [énoncé (38)] ; Propriétés de la covariance de deux variables aléatoires [énoncé (39)].
8. Formule de Koenig-Huyghens pour la variance [énoncé (37)] ; Formule de Koenig-Huyghens pour la covariance [énoncé (41)] ; Variance d'une somme de variables aléatoires [énoncé (43)].
9. Inégalité de Markov [énoncé (44)] ; Inégalité de Biénaymé-Tchebychev [énoncé (45)].
10. Loi binomiale [énoncé (49)] ; Situation de reconnaissance de loi binomiale [énoncé (50)].

4. Exercices de la banque CCINP à étudier

Exercice de la banque CCINP n°94. — *Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3. On lance simultanément les n boules. Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments. Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules. On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.*

1. *Préciser les valeurs prises par X.*
2. (a) *Déterminer la probabilité $\mathbf{P}(X=2)$.*
   (b) *Finir de déterminer la loi de probabilité de X.*
3. (a) *Calculer $\mathbf{E}(X)$.*
   (b) *Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}(X)$. Interpréter ce résultat.*

Exercice de la banque CCINP n°95. — *Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.*

1. *Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne. Pour chaque boule blanche, il gagne deux points, et, pour chaque boule noire, il perd trois points. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches tirées et Y la variable aléatoire donnant le nombre de points du joueur.*
   (a) *Déterminer la loi de la variable aléatoire X, son espérance, sa variance.*
   (b) *Déterminer la loi de la variable aléatoire Y, son espérance, sa variance.*
2. *Dans cette question, on suppose que les tirages se font sans remise.*
   (a) *Déterminer la loi de la variable aléatoire X.*
   (b) *Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.*

Exercice de la banque CCINP n°98. — *Une personne effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts. On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0,1[$). Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.*

1. *Donner la loi de X. Justifier.*
2. *La personne rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n-X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.*
   (a) *Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(Y=k \mid X=i)$.*
   (b) *Prouver que $Z = X+Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.*
   (c) *Déterminer l'espérance et la variance de Z.*

Exercice de la banque CCINP n°99. —

1. *Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev.*
2. *Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi. On pose $X = X_1 + \ldots + X_n$. Démontrer que :*

$$\forall\, a>0 \quad \mathbf{P}\left(\left|\frac{X}{n} - \mathbf{E}(X_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{\mathbf{V}(X_1)}{na^2}.$$

3. *Application : on effectue n tirages successifs et mutuellement indépendants d'une boule, avec remise, dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. À partir de quelle valeur de n peut-on affirmer que la proportion de boules rouges obtenues est comprise, avec une probabilité de 95%, entre 0.35 et 0.45 ?*

Exercice de la banque CCINP n°105. —

1. *Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.*
2. *On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués).*

   Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\dfrac{1}{2}$.

   (a) *On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?*

   (b) *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?*

   (c) *Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.*

Exercice de la banque CCINP n°107. — *On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires. L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires. On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes : on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie. On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient. Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1. Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche » et on pose $p_n = \mathbf{P}(B_n)$.*

1. *Calculer p_1.*
2. *Prouver que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35} p_n + \dfrac{4}{7}$.*
3. *En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.*

Exercice de la banque CCINP n°112. — *Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et E un ensemble fini à n éléments.*

1. *Déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \subset B$.*
2. *Déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.*
3. *Déterminer le nombre de triplets $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$ tels que A, B, C soient deux à deux disjoints et $A \cup B \cup C = E$.*
