Programme de la colle n°11 (13-17 janvier)

Calcul différentiel 1

1. Déroulement de la colle

Étudiants de MPI

La colle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (5 points, 10 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un des exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document (5 points, 15 minutes maximum) : ils auront été travaillés en amont de la colle et les solutions seront exposées avec dynamisme. L'accent sera mis sur la compréhension des concepts et, jamais, on ne récitera un corrigé non compris.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (10 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

Étudiants de MPI*

La colle comporte deux phases.

1. Rédaction d'une question de cours (5 points, 10 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (15 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

N.B. : Les étudiants de MPI* auront impérativement étudié les exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document.

2. Programme

Calcul différentiel 1 — *rappels sur la continuité, graphe d'une fonction de deux variables à valeurs réelles, dérivée selon un vecteur et dérivées partielles, différentielle, différentiabilité de fonctions d'un ouvert de* $\mathbf{R}^n$ *dans* $\mathbf{R}^p$*, opérations sur les applications différentiables, applications de classe* $\mathcal{C}^1$*, deux méthodes classiques pour étudier la différentiabilité, applications de classe* $\mathcal{C}^k$*.*

Les vecteurs tangents à une partie d'un espace vectoriel de dimension finie et l'optimisation, tant au premier ordre qu'au second ordre, n'ont pas encore été abordés. Ces thèmes figureront dans le chapitre « Calcul différentiel 2 ».

À venir. — § Structures algébriques, § Suites et séries de fonctions 2, § Réduction des endomorphismes 2, § Séries entières, § Théorèmes de Lebesgue.

3. Questions de cours

Les références indiquées renvoient au polycopié de cours « Calcul différentiel 1 ».

1. Dérivée selon un vecteur [définition 12]. Dérivée partielle pour une application définie sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$ [définition 16]. L'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

admet des dérivées dans toutes les directions en $(0,0)$, mais est discontinue en $(0,0)$ [exercice 15, résolution].

2. Application différentiable en un point [définition 20]. Différentiabilité et différentielle de l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ A & \longmapsto & A^2 \end{array} \right.$$

[exercice 22, résolution].

3. Être différentiable en un point versus admettre des dérivées directionnelles en ce point [proposition 26, énoncé et démonstration]. Différentielle en un point d'une application différentiable en ce point [définition 28, justification de l'unicité].
4. Différentiabilité et différentielle d'une application linéaire [proposition 32, énoncé] Différentiabilité et différentielle d'une fonction d'un ouvert de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^p$ [proposition 35, énoncé].
5. Expression de la différentielle d'une application différentiable sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$ via les dérivées partielles [proposition 37, énoncé et démonstration]. Matrice Jacobienne [proposition 39, énoncé].
6. Gradient d'une fonction différentiable d'un ouvert de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$ [définition 43]. Lien entre le gradient et la différentielle [proposition 44, énoncé]. Interprétation géométrique du gradient [proposition 45, énoncé et démonstration].
7. Composition d'applications différentiables par une application multilinéaire [proposition 49, énoncé]. Différentiabilité et différentielle de l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ A & \longmapsto & A^3 \end{array} \right.$$

[exercice 50, résolution].

8. Différentielle et différentiabilité d'une composée d'applications différentiables [théorème 51, énoncé et démonstration]. Dérivées partielles d'une composée de deux applications différentiables [théorème 55, énoncé].
9. Application de classe $\mathcal{C}^1$ [définition 58]. Critère pour être de classe $\mathcal{C}^1$ [théorème 59, énoncé].
10. Dérivée le long d'un arc [corollaire 52, énoncé et démonstration]. Intégration d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ le long d'un arc [théorème 67, énoncé et démonstration].

4. Exercices de la banque CCINP à étudier

Des corrigés, rédigés par David Delaunay, sont disponibles.

Exercice de la banque CCINP n°33. — *On pose*

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \qquad f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

et $f(0,0) = 0$.

1. *Démontrer que f est continue sur $\mathbf{R}^2$.*
2. *Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbf{R}^2$.*
3. *f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$? Justifier.*

Exercice de la banque CCINP n°52. — *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'application définie sur $\mathbf{R}^2$ par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. *Prouver que, pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $x^2+y^2-xy \geqslant \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.*
2. (a) *Justifier que le domaine de définition de f est bien $\mathbf{R}^2$.*
   (b) *Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.*
3. *Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.*
   (a) *Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et les calculer.*
   (b) *Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ et donner leur valeur.*
   (c) *f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?*

Exercice de la banque CCINP n°57. —

1. *Soit f une fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$.*
   (a) *Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0,0)$.*
   (b) *Donner la définition de «f différentiable en $(0,0)$».*
2. *On considère l'application définie sur $\mathbf{R}^2$ par*

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & si\,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) *Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}^2$.*
   (b) *Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$.*

Exercice de la banque CCINP n°58. —

1. *Soit E et F deux $\mathbf{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie. Soit $a \in E$ et soit $f \colon E \longrightarrow F$ une application. Donner la définition de « f différentiable en a ».*
2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E. On pose*

$$\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$$

et

$$\forall (x,y) \in E \times E \quad \|(x,y)\| = \max(\|x\|_\infty, \|y\|_\infty)$$

On admet que $\|.\|_\infty$ est une norme sur E et que $\|.\|$ est une norme sur $E \times E$. Soit $B \colon E \times E \longrightarrow \mathbf{R}$ une forme bilinéaire sur E.

   (a) *Prouver que*

$$\exists\, C \in \mathbf{R}^+ \quad \forall\,(x,y) \in E \times E \quad |B(x,y)| \leqslant C\,\|x\|_\infty\,\|y\|_\infty$$

   (b) *Montrer que B est différentiable sur $E \times E$ et déterminer sa différentielle en tout $(u_0, v_0) \in E \times E$.*
