Programme de la colle n°14 (3-7 mars)

Suites/séries de fonctions et séries entières

1. Déroulement de la colle

Étudiants de MPI

La colle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (5 points, 10 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un des exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document (5 points, 15 minutes maximum) : ils auront été travaillés en amont de la colle et les solutions seront exposées avec dynamisme. L'accent sera mis sur la compréhension des concepts et, jamais, on ne récitera un corrigé non compris.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (10 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

Étudiants de MPI*

La colle comporte deux phases.

1. Rédaction d'une question de cours (5 points, 10 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (15 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

N.B. : Les étudiants de MPI* auront impérativement étudié les exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document.

2. Programme

§ Suites et séries de fonctions 1 — *convergence simple d'une suite de fonctions, convergence uniforme d'une suite de fonctions, convergence uniforme dans le cas où les fonctions sont bornées, un critère séquentiel de non-convergence uniforme, passage du local pour la convergence simple (mais pas pour la convergence uniforme), synthèse sur la convergence d'une suite de fonctions définies sur une partie de* $\mathbf{R}$*, la convergence simple n'est pas associée à une norme (HP), convergence simple d'une série de fonctions, convergence uniforme d'une série de fonctions, convergence uniforme d'une série de fonctions versus convergence uniforme de la suite des restes vers la fonction nulle, convergence normale d'une série de fonctions bornées, synthèse sur la convergence d'une séries de fonctions bornées sur une partie de* $\mathbf{R}$*, approximation uniforme.*

§ Suites et séries de fonctions 2 — *continuité et double limite, intégration d'une limite uniforme sur un segment, dérivations des suites/séries de fonctions, étude de la fonction* ζ *de Riemann (HP).*

§ Séries entières — *notion de série entière et problématique, rayon de convergence d'une série entière, calcul pratique du rayon de convergence, somme et produit de Cauchy de deux séries entières, de la continuité d'une somme de série entière, théorème d'Abel radial, régularité de la somme d'une série entière de la variable réelle, fonctions développables en série entière et développements usuels.*

À venir. — § Intégrales à paramètre, § Révisions sur les espaces préhilbertiens, § Équations différentielles linéaires, § Probabilités 2, § Endomorphismes des espaces euclidiens, § Calcul différentiel 2.

3. Questions de cours

Les références indiquées ci-dessous renvoient au polycopié de cours « Suites et séries de fonctions 2 ».

1. Développement en série entière de la fonction $x \longmapsto \arctan(x)$ [énoncé]. Théorème de la double limite en un point de l'intervalle pour une suite de fonctions [théorème 1, énoncé et démonstration].
2. Développement en série entière de le fonction $x \longmapsto \cos(x)$ [énoncé]. Théorème de la double limite en un point du bord l'intervalle pour une série de fonctions [corollaire 10, énoncé].
3. Développement en série entière de la fonction $x \longmapsto \cosh(x)$ [énoncé]. Intégration d'une limite de suite de fonctions sur un segment [théorème 13, énoncé et démonstration].
4. Développement en série entière de la fonction $x \longmapsto (1+x)^\alpha$, où $\alpha \in \mathbf{R}$ [énoncé]. Critère $\mathcal{C}^k$ pour les séries de fonctions, où $k \in \mathbf{N}^*$ [corollaire 29, énoncé].

Les références indiquées ci-dessous renvoient au polycopié de cours « Séries entières ».

5. Développement en série entière de la fonction $x \longmapsto e^x$ [énoncé]. Lemme d'Abel [lemme 2, énoncé et schéma].
6. Développement en série entière de la fonction $x \longmapsto \sinh(x)$ [énoncé]. Caractérisation du rayon de convergence [proposition 7, énoncé, schéma, démonstration].
7. Théorème d'Abel radial [théorème 48, énoncé]. Application au calcul de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ [exercice 49, résolution].
8. Développement en série entière de la fonction $x \longmapsto \sin(x)$ [énoncé]. Caractère $\mathcal{C}^\infty$ de la somme d'une série entière [théorème 52, énoncé].
9. Développement en série entière de la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ [énoncé]. Primitivation terme à terme de la somme d'une série entière. [corollaire 55, énoncé].
10. Développement en série entière de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ [énoncé]. Coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul [corollaire 58, énoncé et démonstration].

4. Exercices de la banque CCINP à étudier

Des corrigés, rédigés par David Delaunay, sont disponibles.

Exercice de la banque CCINP n°2. — *On pose* $f(x) = \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$.

1. *Décomposer $f(x)$ en éléments simples.*
2. *En déduire que f est développable en série entière sur un intervalle du type $]-r, r[$ (où $r > 0$). Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité D de ce développement en série entière.*
3. (a) *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$. On pose, pour tout $x \in]-R, R[$, $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.*
   Exprimer, pour tout entier p, en le prouvant, a_p en fonction de $g^{(p)}(0)$.
   (b) *En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.*

Exercice de la banque CCINP n°10. — *Démontrer que la suite de fonctions :*

$$\left(f_n : x \longmapsto \left(x^2+1\right) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}\right)_{n \in \mathbf{N}}$$

converge uniformément sur $[0,1]$, puis calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \left(x^2+1\right) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} \, dx$.

Exercice de la banque CCINP n°16. — *On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par*

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \forall x \in [0,1] \quad u_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}$$

Si la série $\sum u_n(x)$ converge pour un réel $x \in [0,1]$, on pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \right]$.

1. *Démontrer que S est définie sur $[0,1]$.*
2. *On définit une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.*
   (a) *En utilisant $S(1)$ démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.*
   (b) *En déduire un équivalent simple de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.*
3. *Démontrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et calculer $S'(1)$.*

Exercice de la banque CCINP n°18. — *On pose*

$$\forall\ n \in \mathbf{N}^* \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad u_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{n}$$

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

1. *Étudier la convergence simple de cette série. On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.*
2. (a) *La fonction S est-elle continue sur D ?*
   (b) *Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.*
   (c) *Étudier la convergence uniforme de cette série sur $[0,1]$.*

Exercice de la banque CCINP n°20. —

1. *Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.*
2. *Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :*

$$\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1} \qquad \sum n^{(-1)^n} z^n \qquad \sum \cos(n)\, z^n$$

Exercice de la banque CCINP n°19. —

1. (a) *Justifier, oralement, à l'aide du théorème de dérivation terme à terme, que la somme d'une série entière de la variable réelle est dérivable sur son intervalle ouvert de convergence.*
   (b) *En déduire le développement en série entière à l'origine, de la fonction de la variable réelle : $x \longmapsto \frac{1}{(1-x)^2}$.*
2. (a) *Donner le développement en série entière à l'origine de la fonction de la variable complexe : $z \longmapsto \frac{1}{1-z}$.*
   (b) *Rappeler le produit de Cauchy de deux séries entières.*
   (c) *En déduire le développement en série entière à l'origine, de la fonction de la variable complexe : $z \longmapsto \frac{1}{(1-z)^2}$.*

Exercice de la banque CCINP n°21. —

1. *Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.*
2. *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite bornée telle que la série* $\sum a_n$ *diverge. Quel est le rayon de convergence de la série entière* $\sum a_n z^n$ *? Justifier.*
3. *Quel est le rayon de convergence de la série entière* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)z^n$ *?*

Exercice de la banque CCINP n°23. — *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite complexe telle que la suite* $\left(\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ *admet une limite.*

1. *Démontrer que les séries entières* $\sum a_n\,x^n$ *et* $\sum(n+1)\,a_{n+1}\,x^n$ *ont le même rayon de convergence. On le note* R.
2. *Démontrer que la fonction* $x\longmapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\,x^n$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur l'intervalle* $]-R,R[$.

Exercice de la banque CCINP n°47. — *Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence :*

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{3^n x^{2n}}{n}$
2. $\sum a_n x^n$ *avec* $\begin{cases} a_{2n}=4^n \\ a_{2n+1}=5^{n+1}\end{cases}$

Exercice de la banque CCINP n°51. —

1. *Montrer que la série* $\displaystyle\sum\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$ *converge.*

On se propose de calculer la somme de cette série.

2. *Donner le développement en série entière en 0 de* $t\longmapsto\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ *en précisant le rayon de convergence.*
   Dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.
3. *En déduire le développement en série entière en 0 de* $x\longmapsto\operatorname{Arcsin}x$ *ainsi que son rayon de convergence.*
4. *En déduire la valeur de* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.
