# Programme de la colle n°13 (3-8 février)

# Réduction des endomorphismes et des matrices



## 1. Déroulement de la colle

### Étudiants de MPI

La colle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (5 points, 10 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un des exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document (5 points, 15 minutes maximum) : ils auront été travaillés en amont de la colle et les solutions seront exposées avec dynamisme. L'accent sera mis sur la compréhension des concepts et, jamais, on ne récitera un corrigé non compris.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (10 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

### Étudiants de MPI*

La colle comporte deux phases.

1. Rédaction d'une question de cours (5 points, 10 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (15 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

**N.B. :** Les étudiants de MPI* auront impérativement étudié les exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document.

## 2. Programme

**§ Réduction des endomorphismes et des matrices 1. —** *compléments d'algèbre linéaire, éléments propres d'un endomorphisme, éléments propres d'une matrice carrée, polynôme caractéristique, diagonalisabilité, trigonalisabilité, nilpotence.*

**§ Réduction des endomorphismes et des matrices 2. —** *polynôme d'un endomorphisme, d'une matrice carrée, lemme des noyaux, endomorphismes cycliques et matrices compagnons (HP), théorème de Cayley-Hamilton, polynômes annulateurs et réduction, sous-espaces caractéristiques d'un endomorphismes à polynôme caractéristique scindé.*

**À venir. —** § Suites et séries de fonctions 2, § Séries entières, § Théorèmes de Lebesgue.

## 3. Questions de cours

Les références indiquées renvoient au polycopié de cours « Réduction des endomorphismes et des matrices 2 ».

1. Si $E$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $u$ un endomorphisme de $E$, définition et propriétés de l'application fondamentale de $\mathbf{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$ [théorème 4, énoncé et démonstration]. Propriété remarquable de deux polynômes d'un même endomorphisme [corollaire 5, énoncé oral].

2. Idéal annulateur, polynôme minimal et une base de la **K**-algèbre d'un endomorphisme d'un **K**-espace vectoriel de dimension finie [corollaire 19, énoncé intégral et démonstration du point 4 uniquement].
3. Valeurs propres et polynômes d'endomorphisme [proposition 23, énoncé et démonstration].
4. Ensemble des racines du polynômes minimal et valeurs propres [théorème 28, énoncé et démonstration].
5. Lemme des noyaux [lemme 32, énoncé du point 1 uniquement et démonstration].
6. Théorème de Cayley-Hamilton [théorème 41, énoncé général et démonstration pour une matrice diagonale].
7. Caractérisation algébrique de la diagonalisabilité [théorème 45, énoncé intégral et démonstration de l'implication $2 \implies 1$].
8. Diagonalisabilité et endomorphisme induit [corollaire 48, énoncé et démonstration].
9. Décomposition spectrale d'un endomorphisme trigonalisable [théorème 52, énoncé intégral et démonstration du point 3 uniquement].
10. Un représentant remarquable de la classe de conjugaison d'une matrice à polynôme caractéristique scindé sur **K** [corollaire 54, énoncé et démonstration].

## 4. Exercices de la banque CCINP à étudier

Des corrigés, rédigés par David Delaunay, sont disponibles.

**Exercice de la banque CCINP n°62. —** *Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\,\mathrm{id} = 0$.*

1. *Prouver que $f$ est bijectif et exprimer $f^{-1}$ en fonction de $f$.*
2. *Prouver que $E = \mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}\,(f - 2\,\mathrm{id})$.*
   (a) *en utilisant le lemme des noyaux.*
   (b) *sans utiliser le lemme des noyaux.*
3. *Dans cette question, on suppose que $E$ est de dimension finie. Prouver que $\mathrm{Im}\,(f + \mathrm{id}) = \mathrm{Ker}\,(f - 2\,\mathrm{id})$.*

---

**Exercice de la banque CCINP n°65 (tronqué). —** *Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Écrire le polynôme caractéristique de $A$ et en déduire que le polynôme $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$ est un polynôme annulateur de $A$.*

---

**Exercice de la banque CCINP n°88 (tronqué). —** *Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ la matrice de $E$ définie par*

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad a_{i,j} = \begin{cases} 0 & si \quad i = j \\ 1 & si \quad i \neq j \end{cases}$$

*Soit $u \in \mathcal{L}\,(E)$ défini par*

$$\forall\, M \in E \qquad u(M) = M + \mathrm{tr}\,(M)\; A$$

1. *Prouver que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est annulateur de $u$*
2. *$u$ est-il diagonalisable ? Justifier votre réponse en utilisant deux méthodes.*

---

**Exercice de la banque CCINP n°91.** — *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

1. *Montrer que $A$ n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.*
2. *La matrice $A$ est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?*
3. *Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de $A$.*
4. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^n$ par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de $A^n$.*

---

**Exercice de la banque CCINP n°93.** — *Soit $E$ un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$. On notera* id *l'application identité sur $E$.*

1. *Montrer que* $\mathrm{Im}\,(u) \oplus \mathrm{Ker}\,(u) = E$.
2. (a) *Énoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes.*
   (b) *En déduire que* $\mathrm{Im}\,(u) = \mathrm{Ker}\,(u^2 + u + \mathrm{id})$.
3. *On suppose que $u$ est non bijectif. Déterminer les valeurs propres de $u$. Justifier la réponse.*

---