Programme de la colle n°15 (10-14 mars)

Intégrales à paramètre

1. Déroulement de la colle

Étudiants de MPI

La colle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (5 points, 10 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un des exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document (5 points, 15 minutes maximum) : ils auront été travaillés en amont de la colle et les solutions seront exposées avec dynamisme. L'accent sera mis sur la compréhension des concepts et, jamais, on ne récitera un corrigé non compris.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (10 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

Étudiants de MPI*

La colle comporte deux phases.

1. Rédaction d'une question de cours (5 points, 10 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (15 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

N.B. : Les étudiants de MPI* auront impérativement étudié les exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document.

2. Programme

§ Intégrales à paramètre — *théorème de convergence dominée, variante continue du théorème de convergence dominée, théorèmes d'intégration terme à terme de Lebesgue, continuité d'une intégrale à paramètre, dérivée d'une intégrale à paramètre, dérivées d'ordre supérieur d'une intégrale à paramètre, étude de la fonction* Γ *d'Euler (HP).*

À venir. — § Équations différentielles linéaires, § Probabilités 2, § Endomorphismes des espaces euclidiens, § Calcul différentiel 2.

3. Questions de cours

Les références indiquées ci-dessous renvoient au polycopié de cours « Intégrales à paramètre ».

1. Théorème de convergence dominée [théorème 1, énoncé].
2. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ [exercice 4, résolution].
3. Variante continue du théorème de convergence dominée [corollaire 11, énoncé].
4. Théorème d'intégration terme à terme de Lebesgue : cas positif [théorème 14, énoncé].

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ [exercice 15, résolution].
6. Théorème d'intégration terme à terme de Lebesgue : cas général [théorème 21, énoncé].
7. Continuité d'une intégrale à paramètre [théorème 32, énoncé].
8. Dérivée d'une intégrale à paramètre [théorème 41, énoncé].
9. Dérivée d'ordre supérieur d'une intégrale à paramètre [théorème 49, énoncé].
10. La fonction :
$$\Gamma \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$
est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et ses dérivées itérées possèdent des expressions sous forme d'intégrales [exercice 53, résolution].

4. Exercices de la banque CCINP à étudier

Des corrigés, rédigés par David Delaunay, sont disponibles.

Exercice de la banque CCINP n°25. —

1. *Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.*
2. *Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2+t^n e^{-t}}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.*

Exercice de la banque CCINP n°27. — *Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.*

1. *Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$.*
2. *Soit $a \in]0,1[$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,1]$?*
3. *La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?*
4. *Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.*

Exercice de la banque CCINP n°29. — *On pose :*
$$\forall\, x \in]0,+\infty[\qquad \forall\, t \in]0,+\infty[\qquad f(x,t) = e^{-t}\, t^{x-1}$$

1. *Démontrer que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. On pose alors :*
$$\forall\, x \in]0,+\infty[\qquad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$$
2. *Pour tout $x \in]0,+\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.*
3. *Démontrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.*

Exercice de la banque CCINP n°30. —

1. *Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.*
2. *Démontrer que la fonction $f\colon x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(x\,t)\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$.*
3. *(a) Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.*
   (b) Résoudre (E) .

Exercice de la banque CCINP n°50. — *On considère la fonction* $F\colon x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2\,t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

1. *Prouver que* F *est définie et continue sur* $]0,+\infty[$.
2. *Prouver que* $x \longmapsto x\,F(x)$ *admet une limite en* $+\infty$ *et déterminer la valeur de cette limite.*
3. *Déterminer un équivalent, au voisinage de* $+\infty$, *de* $F(x)$.
