Programme de la colle n°16 (17-21 mars)

Équations différentielles linéaires

1. Déroulement de la colle

Étudiants de MPI

La colle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (5 points, 10 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un des exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document (5 points, 15 minutes maximum) : ils auront été travaillés en amont de la colle et les solutions seront exposées avec dynamisme. L'accent sera mis sur la compréhension des concepts et, jamais, on ne récitera un corrigé non compris.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (10 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

Étudiants de MPI*

La colle comporte deux phases.

1. Rédaction d'une question de cours (5 points, 10 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (15 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

N.B. : Les étudiants de MPI* auront impérativement étudié les exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document.

2. Programme

Acronymes. — Pour simplifier la présentation de la suite, nous introduisons trois acronymes.

- EDL1 : équation différentielle linéaire d'ordre 1
- SDL1 : système différentiel linéaire d'ordre 1
- EDLSn : équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n, où $n \geqslant 1$ est un entier

§ Équations différentielles linéaires — *présentation des objets de l'étude (EDL1, SDL1, EDLSn), champ de vecteurs d'un SDL1, réduction à l'étude des EDL1, mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy, principe de superposition et conséquence pour l'ensemble solution, théorème de Cauchy linéaire, rappels et compléments sur l'exponentielle d'un endomorphisme/d'une matrice, SDL1 homogène à coefficients constants, méthode de variation des constantes pour obtenir une solution particulière d'un SDL1, quelques méthodes pour résoudre un SDL1, EDLS2, une méthode générique pour résoudre une EDLS2, exemples de résolution d'équations différentielles linéaires non normalisées.*

À venir. — § Probabilités 2, § Endomorphismes des espaces euclidiens, § Calcul différentiel 2.

3. Questions de cours

Les références indiquées ci-dessous renvoient au polycopié de cours « Équations différentielles linéaires ».

1. Définition d'un SDL1 et d'un problème de Cauchy associé à un SDL1 [(1) et (5) de la définition 7]. Théorème de Cauchy pour un SDL1 [énoncé du théorème 32].
2. Définition d'une EDLSn et d'un problème de Cauchy associé à une EDLSn [(1) et (5) de la définition 13]. Théorème de Cauchy pour une EDLSn [énoncé du théorème 36].
3. Réduction de l'étude d'une EDLSn à celle d'un SDL1 [enoncé de la proposition 17].
4. Ensemble solution d'un SDL1 homogène [énoncé du corollaire 33 et explication orale de la propriété remarquable de l'application φ_{t_0}].
5. Ensemble solution d'une EDLSn [énoncé du corollaire 38].
6. Résolution d'un SDL1 homogène à coefficients constants à l'aide d'une exponentielle de matrice [énoncé et démonstration du théorème 48].
7. Résolution d'un SDL1 homogène à coefficients constants dans le cas diagonalisable [énoncé et démonstration du théorème 52].
8. Méthode de variation des constantes pour rechercher une solution particulière d'un SDL1 [énoncé de la proposition 54].
9. Caractérisation des bases de l'ensemble solution d'une EDLS2 homogène [énoncé de la proposition 59 et démonstration de l'équivalence entre (1) et (2)].
10. Méthode de variation des constantes pour rechercher une solution particulière d'une EDLS2 [énoncé de la proposition 65].

4. Exercices de la banque CCINP à étudier

Des corrigés, rédigés par David Delaunay, sont disponibles.

Exercice de la banque CCINP n°31. —

1. *Déterminer une primitive de* $x \longmapsto \cos^4(x)$.
2. *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *l'équation différentielle :*

$$y'' + y = \cos^3(x)$$

en utilisant la méthode de variation des constantes.

Exercice de la banque CCINP n°32. — *Soit l'équation différentielle :*

$$(\mathcal{E}) \qquad x\,(x-1)\,y'' + 3\,x\,y' + y = 0$$

1. *Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle* $]-r,r[$ *de* $\mathbf{R}$, *avec* $r > 0$. *Déterminer la somme des séries entières obtenues.*
2. *Est-ce que toutes les solutions de* $(\mathcal{E})$ *sur* $]0,1[$ *sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur* $]-1,1[$ *?*

Exercice de la banque CCINP n°42. — *On considère les deux équations différentielles suivantes :*

$$(\mathcal{EH}) \quad 2\,x\,y' - 3\,y = 0 \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{E}) \quad 2\,x\,y' - 3\,y = \sqrt{x}$$

1. *Résoudre l'équation* $(\mathcal{EH})$ *sur l'intervalle* $]0,+\infty[$.
2. *Résoudre l'équation* $(\mathcal{E})$ *sur l'intervalle* $]0,+\infty[$.

3. *L'équation* $(\mathcal{E})$ *admet-elle des solutions sur l'intervalle* $[0,+\infty[$ *?*

Exercice de la banque CCINP n°74. — *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. *Justifier que* A *est diagonalisable.*
2. *Déterminer les valeurs propres de* A *puis une base de vecteurs propres associés.*
3. *On considère le système différentiel :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & x + 2\,z \\ y' & = & y \\ z' & = & 2\,x + z \end{array} \right.$$

où x, y, z *désignant trois fonctions de la variable* t*, dérivables sur* $\mathbf{R}$*. En utilisant la question 2 et en le justifiant, résoudre ce système.*

Exercice de la banque CCINP n°75. — *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. *Démontrer que* A *n'est pas diagonalisable.*
2. *On note* f *l'endomorphisme de* $\mathbf{R}^2$ *canoniquement associé à* A*. Trouver une base* (v_1, v_2) *de* $\mathbb{R}^2$ *dans laquelle la matrice de* f *est de la forme* $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$*. On donnera explicitement les valeurs de* a*,* b *et* c*.*
3. *En déduire la résolution du système différentiel :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & -x - 4\,y \\ y' & = & x + 3\,y \end{array} \right.$$
