Programme de la colle n°17 (24-28 mars)

Endomorphismes remarquables des espaces euclidiens

1. Déroulement de la colle

Étudiants de MPI

La colle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (5 points, 10 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un des exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document (5 points, 15 minutes maximum) : ils auront été travaillés en amont de la colle et les solutions seront exposées avec dynamisme. L'accent sera mis sur la compréhension des concepts et, jamais, on ne récitera un corrigé non compris.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (10 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

Étudiants de MPI*

La colle comporte deux phases.

1. Rédaction d'une question de cours (5 points, 10 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (15 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

N.B. : Les étudiants de MPI* auront impérativement étudié les exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document.

2. Programme

§ Endomorphismes remarquables des espaces euclidiens — *adjoint d'un endomorphisme, matrices orthogonales, isométries vectorielles d'un espace euclidien, isométries vectorielles en dimension 2, réduction des isométries vectorielles, réduction d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3, endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien, endomorphisme autoadjoint positif/défini positif.*

3. Questions de cours

Les références indiquées ci-dessous renvoient au polycopié de cours « Endomorphismes remarquables des espaces euclidiens ».

1. Théorème de Riesz [énoncé et démonstration du théorème 1]. Définition de l'adjoint [énoncé de la proposition-définition 3].
2. Matrice de l'adjoint dans une base orthonormée [énoncé de la proposition 5]. Propriété de stabilité de l'adjoint [énoncé et démonstration de la proposition 7].
3. Caractérisation des matrices orthogonales par ses colonnes/lignes [énoncé et démonstration de la proposition 13].
4. Groupe orthogonal $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ [énoncé et démonstration de la proposition 17].

5. Caractérisation d'une isométrie vectorielle [énoncé intégral du théorème 44 et démontration des implications $1 \Longrightarrow 2$ et $4 \Longrightarrow 5$].
6. Description en extension de $\mathbf{O}_2(\mathbf{R})$ [énoncé et démonstration du théorème 52].
7. Réduction d'une isométrie vectorielle indirecte d'un plan euclidien [énoncé et démonstration du lemme 59]. Description géométrique des isométries vectorielles d'un plan euclidien [énoncé du théorème 60].
8. Sous-espace stable par une isométrie vectorielle [énoncé et démonstration du théorème 67].
9. Réduction des isométries d'un espace euclidien [énoncé du théorème 68]. Réduction des matrices orthogonales [énoncé du corollaire 69].
10. Caractérisation des endomorphimes autoadjoints [énoncé et démonstration du théorème 76].
11. Structure de l'ensemble $\mathcal{S}(E)$ des endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien E [énoncé et démonstration de la proposition 78].
12. Un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien possède une valeur propre réelle [démonstration d'une partie de la proposition 81].
13. Théorème spectral pour les endomorphismes autoadjoints [énoncé du théorème 82]. Théorème spectral pour les matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ [énoncé du corollaire 83].
14. Caractérisation spectrale des matrices positives, définie positives [énoncé intégral du corollaire et démonstration de l'équivalence 1].

4. Exercices de la banque CCINP à étudier

Des corrigés, rédigés par David Delaunay, sont disponibles.

Exercice de la banque CCINP n°63. — *Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot , \cdot \rangle$. On pose, pour tout $x \in E$, $||\, x \,|| = \sqrt{\langle x , x \rangle}$. Pour tout endomorphisme u de E, on note u^* l'adjoint de u.*

1. *Un endomorphisme u de E vérifiant, pour tout $x \in E$, $\langle u(x) , x \rangle = 0$ est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?*
2. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes.*
   i. $u \circ u^* = u^* \circ u$
   ii. *Pour tout $(x,y) \in E^2$, $\langle u(x) , u(y) \rangle = \langle u^*(x) , u^*(y) \rangle$.*
   iii. *Pour tout $x \in E$, $||\, u(x) \,|| = ||\, u^*(x) \,||$.*

Exercice de la banque CCINP n°66. —

1. *Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$. Prouver que si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$ alors $\mathrm{Spec}(A) \subset [0, +\infty[$.*
2. *Prouver que, pour tout $A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$, $A^2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$.*
3. *Prouver que, pour tout $A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$, pour tout $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$:*
$$A\,B = B\,A \implies A^2\,B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$$
4. *Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$. Prouver qu'il existe $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$ telle que $A = B^2$.*

Exercice de la banque CCINP n°68. — *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. *Démontrer que A est diagonalisable de quatre manière.*
   (a) *sans calcul ;*
   (b) *en calculant directement le déterminant $\det(\lambda \mathrm{I}_3 - A)$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres ;*

   (c) en utilisant le rang de la matrice ;
   (d) en calculant A^2.

2. *On suppose que* A *est la matrice d'un endomorphisme* u *d'un espace euclidien dans une base orthonormée. Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de* u *est diagonale.*

Exercice de la banque CCINP n°78. — *Soit* E *un espace euclidien de dimension* n *et* u *un endomorphisme de* E. *On note* $\langle\, x \,,\, y \,\rangle$ *le produit scalaire de* $x \in E$, $y \in E$ *et* $||\cdot||$ *la norme euclidienne associée.*

1. *Soit* u *un endomorphisme de* E *tel que, pour tout* $x \in E$, $||\, u(x)\, || = ||\, x\, ||$.
   (a) Démontrer que, pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle\, u(x) \,,\, u(y)\,\rangle = \langle\, x \,,\, y\,\rangle$.
   (b) Démontrer que u *est bijectif.*
2. *On note* $\mathbf{O}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) \;:\; \forall\, x \in E \quad ||\, u(x)\, || = ||\, x\, ||\}$ *l'ensemble des isométries vectorielles de* E. *Démontrer que* $\mathcal{O}(E)$ *, muni de la loi* $\circ$ *, est un groupe.*
3. *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$. *Soit* $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ *une base orthonormée de* E. *Prouver que :*

$$u \in \mathbf{O}(E) \iff (u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n)) \text{ est une base orthonormée de } E$$
