

Corrigé de l'épreuve Mathématiques II, CCMP 2017, filière PC.
Laurent Bonavero - Lycée Champollion (Grenoble)

Avertissements : ceci n'est pas LE corrigé mais UN corrigé.

Il y a dans tous mes corrigés des erreurs potentielles ou des choses qui ne vous sembleront pas claires...me contacter le cas échéant !

- (1) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{k \geq 0} \frac{\lambda^k}{k!}$ est convergente de somme e^λ . Pour $x \in \mathbb{R}$ et donc a priori pour $x > 0$, la quantité $R_n(x)$ est le reste d'ordre n de la série précédente avec $\lambda = nx$: il est donc bien défini. De plus

$$T_n(x) + R_n(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{(nx)^k}{k!} = e^{nx}.$$

- (2) La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n appliqué entre 0 et x à la fonction (de classe \mathcal{C}^∞) $f : t \mapsto e^{nt}$ s'écrit

$$e^{nx} = f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = \sum_{k=0}^n \frac{n^k x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} n^{n+1} e^{nt} dt.$$

En effectuant le changement de variables $u = x - t$ dans le terme intégral, on en déduit

$$\underline{R_n(x)} = e^{nx} - T_n(x) = \int_x^0 \frac{u^n}{n!} n^{n+1} e^{n(x-u)} (-du) = \frac{e^{nx} n^{n+1}}{n!} \int_0^x u^n e^{-nu} du = \underline{\underline{e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^x (ue^{-u})^n du.}}$$

- (3) On a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+2} y^{n+1} n!}{(n+1)! n^{n+1} y^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} y = y \exp((n+1) \ln(1 + 1/n)).$$

Or,

$$(n+1) \ln(1 + 1/n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n+1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) \ln(1 + 1/n) = 1$ et par continuité de l'exponentielle au point 1, on en déduit que

$$\underline{\underline{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = ye.}}$$

Si $y < e^{-1}$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ et par le critère de d'Alembert que $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0}$.

- (4) La fonction $u \mapsto ue^{-u}$ est dérivable de dérivée $u \mapsto (1-u)e^{-u}$. Elle est donc strictement croissante sur $[0, 1]$. Pour $x \in]0, 1[$, on en déduit que

$$M = \sup_{u \in [0, x]} ue^{-u} = xe^{-x} < 1 \times e^{-1} = e^{-1}.$$

On en déduit que

$$0 \leq R_n(x) \leq e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} M^n.$$

D'après la question précédente, et comme $M < e^{-1}$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{n+1}}{n!} M^n = 0$ et donc bien que

$$\boxed{R_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(e^{nx})}.$$

De là, pour $x \in]0, 1[$,

$$T_n(x) = e^{nx} - R_n(x) = e^{nx} + o(e^{nx}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{nx}.$$

- (5) Immédiat par récurrence et intégration par parties, et hyper classique !

(6) On a

$$T_n(x) = e^{nx} - e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^x (ue^{-u})^n du.$$

Or, et d'après la question précédente :

$$\int_0^{+\infty} (ue^{-u})^n du = \int_0^{+\infty} u^n e^{-nu} du \stackrel{t=nu}{=} \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{n^n} e^{-t} \frac{dt}{n} = \frac{1}{n^{n+1}} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = \frac{n!}{n^{n+1}}.$$

On en déduit que

$$\underline{T_n(x)} = e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \left(\int_0^{+\infty} (ue^{-u})^n du - \int_0^x (ue^{-u})^n du \right) = \underline{e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_x^{+\infty} (ue^{-u})^n du}.$$

(7) Suivons l'indication de l'énoncé en commençant par la justifier : la fonction $u \mapsto ue^{-u}$ est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. On en déduit que pour $x > 1$ et pour $u \geq x$, on a $ue^{-u} \leq xe^{-x}$. On en déduit que

$$(ue^{-u})^n = (ue^{-u})^{n-1} \times ue^{-u} \leq (xe^{-x})^{n-1} \times ue^{-u}.$$

De là

$$0 \leq T_n(x) \leq e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} (xe^{-x})^{n-1} \int_x^{+\infty} ue^{-u} du = e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} (xe^{-x})^n \times \frac{1}{xe^{-x}} \int_x^{+\infty} ue^{-u} du.$$

Or, comme $x > 1$, $xe^{-x} < 1 \times e^{-1} = e^{-1}$, en appliquant à nouveau (3), il vient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{n+1}}{n!} (xe^{-x})^n = 0$ et donc par domination $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x) e^{-nx} = 0$ et finalement $\boxed{T_n(x) = o(e^{nx})}$.

(8) La fonction f est dérivable sur $]-1, 1[$ et possède un maximum en $0 \in]-1, 1[$. On en déduit que $\boxed{f'(0) = 0}$.

On a alors, d'après la formule de Taylor-Young en 0 :

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

et donc

$$\varphi(x) = -\frac{1}{x^2} \ln \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{x^2} \times \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}$$

puis

$$\underline{\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \frac{1}{2}}.$$

(9) La fonction φ est continue sur $]-1, 1[$ et à valeurs > 0 : c'est clair sur $]-1, 1[\setminus\{0\}$ car $f(x) \in]0, 1[$ si $x \in]-1, 1[\setminus\{0\}$ et c'est aussi clair en 0 puisque $\varphi(0) = 1/2$. Mais comme $]-1, 1[$ n'est pas un segment, il faut examiner le comportement de φ lorsque x tend vers 1 et -1 afin de conclure correctement.

- Si $f(-1) > 0$, alors φ se prolonge par continuité en -1 et $\varphi(-1) = -\ln(f(-1)) > 0$. La fonction φ est alors continue sur le segment $[-1, 0]$ et à valeurs > 0 , elle y possède donc un minimum > 0 .
- Si $f(-1) = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow -1} \varphi(x) = +\infty$. Il existe donc $\delta > 0$ tel que φ est à valeurs ≥ 2 sur $]-1, -1 + \delta[$. Sur le segment $[-1 + \delta, 0]$, la fonction φ est alors continue et à valeurs > 0 donc y possède un minimum $c > 0$. On a alors $\varphi \geq \min(2, c) > 0$ sur $[-1, 0]$.

Dans les deux cas, φ est minorée sur $]-1, 0]$ par un réel > 0 . Le même raisonnement vaut lorsque x tend vers 1 et donc sur $[0, 1[$.

On a bien montré que φ est minorée par un réel > 0 sur $]-1, 1[$.

Soit $\alpha > 0$ tel que $\varphi(x) \geq \alpha$ pour tout $x \in]-1, 1[$. Alors $\ln(f(x)) \leq -\alpha x^2$ et par croissance de l'exponentielle,

$$\forall x \in]-1, 1[, f(x) \leq e^{-\alpha x^2}.$$

Par continuité de f et passage à la limite dans cette inégalité, on en déduit que

$$\forall x \in [-1, 1], f(x) \leq e^{-\alpha x^2}.$$

- (10) La fonction g_n est bien définie car $u/\sqrt{n} \in [-1, 1]$ lorsque $u \in [-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$ et est bien continue par morceaux car f est continue sur $[-1, 1]$. Puis, $u \in \mathbb{R}$ étant fixé, on a $u \in [-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$ pour n assez grand, donc, pour n assez grand,

$$g_n(u) = \exp(n \ln(f(u/\sqrt{n}))) = \exp(n \ln(1 - u^2/2n + o(1/n))) = \exp(-u^2n/2n + o(1)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-u^2/2}.$$

On a bien montré que la suite $(g_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur \mathbb{R} vers la fonction $u \mapsto e^{-u^2/2}$.

- (11) On a de plus, d'après (9)

$$0 \leq g_n(u) \leq (e^{-au^2/n})^n = e^{-au^2}.$$

Cette domination est indépendante de n et la dominante est intégrable. D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}} g_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} g = \sqrt{2\pi}.$$

Or,

$$\int_{\mathbb{R}} g_n = \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} (f(u/\sqrt{n}))^n du = \int_{x=u/\sqrt{n}}^1 (f(x))^n \sqrt{n} dx = \sqrt{n} \int_{-1}^1 (f(x))^n dx.$$

On a donc bien

$$\int_{-1}^1 (f(x))^n dx \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$

Par parité de la fonction g , on a

$$\int_0^{+\infty} g = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} g = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

et le même raisonnement en passant à la limite dans la suite d'intégrales $\left(\int_0^{+\infty} g_n\right)_{n \geq 1}$ donne de suite

$$\int_0^1 (f(x))^n dx \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

- (12) On a, par Chasles,

$$I_n + J_n = \int_{-1}^{+\infty} (x+1)^n e^{-nx} dx = \int_{u=x+1}^{+\infty} u^n e^{-nu+n} du = e^n \int_0^{+\infty} u^n e^{-nu} du \underset{t=nu}{=} e^n \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{n^n} e^{-t} \frac{dt}{n} \underset{(5)}{=} e^n \frac{n!}{n^{n+1}}$$

$$\text{et donc } \boxed{n! = e^{-n} n^{n+1} (I_n + J_n)}.$$

- (13) La fonction $x \mapsto x \ln(2) - \ln(x+1)$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ de dérivée égale à $x \mapsto \ln 2 - \frac{1}{x+1}$.

Or, pour $x \geq 1$,

$$\ln 2 - \frac{1}{x+1} \geq \ln 2 - \frac{1}{2} > 0.$$

La fonction $x \mapsto x \ln(2) - \ln(x+1)$ est donc croissante sur $[1, +\infty[$. Etant nulle en $x = 1$, on a donc

$$\forall x \geq 1, x \ln(2) \geq \ln(x+1)$$

et donc

$$\forall x \geq 1, 2^x \geq x+1.$$

On en déduit que

$$\underline{0 \leq J_n \leq} \int_1^{+\infty} 2^{nx} e^{-nx} dx = \int_1^{+\infty} e^{n(\ln 2 - 1)x} dx = \frac{e^{n(\ln 2 - 1)}}{n(1 - \ln 2)} = \underline{\left(\frac{2}{e}\right)^n \frac{1}{n(1 - \ln 2)}}.$$

- (14) Considérons la fonction $x \mapsto f(x) = (x+1)e^{-x}$. Elle est bien de classe \mathcal{C}^2 sur $[-1, 1]$, à valeurs > 0 sur $] -1, 1]$, de dérivée égale à $x \mapsto -xe^{-x}$. Elle possède un maximum en 0 où elle vaut bien 1 et on a aussi $f''(0) = -1$. On en déduit que

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$

- (15) Comme $2/e < 1$, on déduit de (13) et (14) que $J_n = o(I_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Et donc de (12) que

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-n} n^{n+1} I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-n} n^{n+1} \sqrt{\frac{2\pi}{n}} = \left(\frac{n}{e}\right)^n n \sqrt{\frac{2\pi}{n}} = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}.$$

- (16) En (2), on a vu que

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} n^{n+1} e^{nt} dt.$$

On a donc

$$R_n(1) = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} n^{n+1} e^{nt} dt = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{nt} dt.$$

- (17) La fonction $t \mapsto (1-t)e^t$ vérifie elle aussi toutes les hypothèses pour appliquer Laplace et on a donc, d'après (11)

$$\int_0^1 (1-t)^n e^{nt} dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Puis à l'aide de Stirling :

$$\underline{R_n(1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{e}{n}\right)^n \frac{n^{n+1}}{\sqrt{2n\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{2n}} = \frac{e^n}{2}.$$

De là,

$$T_n(1) = e^n - R_n(1) = e^n (1 - R_n(1)e^{-n}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^n}{2}.$$

- (18) *Solution par Romain Krust.* Voici deux solutions, rédigées en python. On prend en compte le fait que les listes python sont indexées à partir de 0. Dans la première, outre l'opérateur `in`, on s'autorise l'utilisation du "slicing" (`L[a:b]` renvoie la liste extraite de `L` dont les indices sont dans l'intervalle `[[a, b[`). On l'évite dans la seconde au prix d'une d'une boucle supplémentaire (l'opérateur `in` est alors sans pertinence) :

`def X(liste):`

```

n = len(liste) - 1
for k in range(1, n+1):
    if liste[k] in liste[0:k]:
        return k+1

```

`def X(liste):`

```

n = len(liste) - 1
for k in range(1, n+1):
    for j in range(0, k):
        if liste[j] == liste[k]:
            return k+1

```

- (19) Pour $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$, l'événement $(X = k)$ contient l'événement $(U_1 = 1, U_2 = 2, \dots, U_{k-1} = k-1, U_k = 1)$ et ce dernier événement est de probabilité égale à $1/n^k$ par indépendance des U_j .

On a donc $\mathbf{P}(X = k) \geq 1/n^k$ et *a fortiori*, $\mathbf{P}(X = k) \neq 0$.

- (20) D'après la question précédente, $\mathbf{P}(X > k) > 0$ pour $k \leq n$ et on a

$$\mathbf{P}(X > k+1 \mid X > k) = \frac{\mathbf{P}((X > k+1) \cap (X > k))}{\mathbf{P}(X > k)}.$$

Or, $(X > k+1) \subset X > k$ donc $(X > k+1) \cap (X > k) = (X > k+1)$ et donc

$$\mathbf{P}(X > k+1 \mid X > k) = \frac{\mathbf{P}(X > k+1)}{\mathbf{P}(X > k)}$$

soit encore

$$\mathbf{P}(X > k + 1) = \mathbf{P}(X > k + 1 \mid X > k)\mathbf{P}(X > k).$$

- (21) Sachant que $X > k$, on a $X > k + 1$ si et seulement si la $(k + 1)$ -ième boule tirée est distincte des k premières boules tirées. On a donc

$$\mathbf{P}(X > k + 1 \mid X > k) = \frac{n - k}{n}.$$

De là

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X > k) &= \frac{n - k + 1}{n} \mathbf{P}(X > k - 1) = \frac{n - k + 1}{n} \frac{n - k + 2}{n} \mathbf{P}(X > k - 2) \\ &= \dots \\ &= \frac{(n - k + 1)(n - k + 2) \dots (n - k + k)}{n^k} \mathbf{P}(X > 0) \\ &= \frac{n!}{(n - k)!n^k}. \end{aligned}$$

On peut remplacer les \dots par une récurrence immédiate.

- (22) C'est du cours :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n+1} k \mathbf{P}(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} k (\mathbf{P}(X > k - 1) - \mathbf{P}(X > k)) \\ &= \sum_{k=0}^n (k + 1) \mathbf{P}(X > k) - \sum_{k=1}^{n+1} k \mathbf{P}(X > k) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(X > k) + \mathbf{P}(X > 0) - (n + 1) \mathbf{P}(X > n + 1) \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X > k) \end{aligned}$$

car $\mathbf{P}(X > n + 1) = 0$.

- (23) On a donc

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n - k)!n^k} \underset{j=n-k}{=} \sum_{j=0}^n \frac{n!}{j!n^{n-j}} = \frac{n!}{n^n} \sum_{j=0}^n \frac{n^j}{j!} = \frac{n!}{n^n} T_n(1).$$

A l'aide de (17) et de Stirling, on en déduit que

$$\mathbf{E}(X) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi} \frac{e^n}{2} = \sqrt{\frac{n\pi}{2}}.$$