Mines M2 2020 - Corrigé - NON RELU

I. Résultats préliminaires

I.1. Etude d'une série entière

1. Soit $x > 0$.
• $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
• $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$.
Or $t \mapsto \dfrac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable sur $]0,1]$ (Riemann et $1-x<1$), donc, par comparaison, $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,1]$.
• $\dfrac{t^{x-1}e^{-t}}{1/t^2} = t^{x+1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ par croissances comparées, donc $t^{x-1}e^{-t} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
Or $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann et $2>1$), donc, par comparaison, $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
• $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc, en particulier, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ converge, donc $\Gamma(x)$ existe.
De plus, pour tout $t>0$, $t^{x-1}e^{-t}>0$, donc, par stricte positivité de l'intégrale convergente,
$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \geq 0.$$

2. Soit $x>0$.
Posons $u(t)=t^x$, $u'(t)=xt^{x-1}$, $v'(t)=e^{-t}$, $v(t)=-e^{-t}$.
u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
$u(t)v(t) = t^x e^{-t} \underset{t\to 0^+}{\to} 0$, car $x>0$.
$u(t)v(t) = t^x e^{-t} \underset{t\to +\infty}{\to} 0$ par croissances comparées.
Enfin, $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt = \Gamma(x+1)$ converge, donc, par intégration par parties, $\displaystyle\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)dt$ converge et
$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \left[t^x e^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} xt^{x-1}e^{-t}dt \\ &= 0 + x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = x\Gamma(x).\end{aligned}$$

3. Pour tout $x \neq 0$, posons $u_n(x) = a_n x^n \neq 0$ car $a_n \neq 0$ d'après la question 1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :
$$\begin{aligned}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| &= \left|\frac{\Gamma(n+1+\alpha+1)n!x^{n+1}}{\Gamma(n+x+1)(n+1)!x^n}\right| = \frac{\Gamma((n+\alpha+1)+1)}{(n+1)\Gamma(n+\alpha)}|x| \\ &= \frac{(n+\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+1)}{(n+1)\Gamma(n+\alpha+1)}|x| \quad \text{(d'après la question 2 avec } n+\alpha+1>0) \\ &= \frac{n+\alpha+1}{n+1}|x| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n}|x| \underset{n\to+\infty}{\to} |x|,\end{aligned}$$
donc, d'après le critère de d'Alembert pour les séries numériques,
— si $|x|<1$, $\sum\limits_{n\geq 0} u_n(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ converge absolument, donc $R \geq 1$;
— si $|x|>1$, $\sum\limits_{n\geq 0} u_n(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ diverge grossièrement, donc $R \leq 1$.
On a donc $R=1$.

4. Pour tout $x \in]-1,1[$,
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{t^{n+\alpha}x^n e^{-t}}{n!}dt.$$
Fisons $x\in]-1,1[$ et posons, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n : t\in\mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{t^{n+\alpha}x^n e^{-t}}{n!}$.
— Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto \dfrac{x^n}{n!}e^{n+\alpha}e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme multiple (par une constante indépendante de t) d'une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (d'après la question 1).
— Pour tout $t>0$, $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(t) = \sum\limits_{n\geq 0} t^\alpha e^{-t}\dfrac{(xt)^n}{n!}$ converge (multiple d'une série exponentielle) et sa somme vaut :
$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = t^\alpha e^{-t}e^{xt} = t^\alpha e^{(x-1)t}.$$
De plus, f est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|dt = \frac{|x|^n}{n!}\Gamma(n+\alpha-1) = a_n|x|^n$, donc $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\int_0^{+\infty} |f_n(t)|dt = \sum a_n|x|^n$ converge (car $x \in]-1,1[$, disque ouvert de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, donc $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge absolument).

D'où, d'après le théorèmùe d'intégration terme à terme, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \int_0^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{(x-1)t}dt.$$

Posons $u = (1-x)t \Leftrightarrow t = \dfrac{u}{1-x}$. Comme $x \in]-1,1[$, ce changement de variable est de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissant et réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a $dt = \dfrac{du}{1-x}$.

D'où, comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{(x-1)t}dt$ converge, on peut effectuer le changement de variable sur l'intégrale impropre et la nouvelle intégrale converge et :

$$\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{(x-1)t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{(1-x)^\alpha}e^{-u}\frac{du}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}}\int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u}du = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-x)^{\alpha+1}}.$$

On a donc bien l'égalité demandée.

I.2. Projections orthogonales

Tout est du cours dans cette partie, et il s'agit de le redémontrer...

5. Comme F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, on a $F \oplus F^\perp = E$.
   Par suite, pour tout $x \in E$, il existe un unique $(y,z) \in F \times F^\perp$ tel que $x = y+z$ et on pose alors $\pi_F(x) = y$.

6. Pour tout $y \in F$, $y = \displaystyle\sum_{i=1}^n \langle y, e_i\rangle e_i$ (décomposition dans une base orthonormée).
   De plus, pour tout $x \in E$, en notant $x = y+z$ la décomposition de X selon $F \oplus F^\perp$, on a :
   $$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \langle x, e_i\rangle = \langle y, e_i\rangle + \underbrace{\langle z, e_i\rangle}_{=0 \text{ car } e_i\in F \text{ et } z\in F^\perp} = \langle y, e_i\rangle,$$
   donc on a bien
   $$\pi_F(x) = y = \sum_{i=1}^n \langle y, e_i\rangle e_i = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i.$$

7. On a $x = \pi_F(x) + x - \pi_F(x)$ où $\underbrace{\pi_F(x)}_{\in F} \perp \underbrace{(x-\pi_F(x))}_{\in F^\perp}$, donc, d'après le théorème de pythagore,
   $$\|x\|^2 = \|\pi_F(x)\|^2 + \|x-\pi_F(x)\|^2,$$
   donc on a bien
   $$\|x-\pi_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|\pi_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle^2 \quad \text{(d'après la question précédente).}$$

II. Polynômes de Laguerre

8. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, en posant $u = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $b = (b,a) \in \mathbb{R}^2$, et en considérant le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$, noté $(.|.)$, on a, d'après Cauchy-Schwartz,
   $$|(u|v)| \leq \sqrt{(u|u)(v|v)}, \quad (\text{ie} \quad |2ab| \leq \sqrt{(a^2+b^2)^2} = a^2+b^2. \quad \text{CQFD.}$$

9. Soit f et g deux éléments de E_α.
   $x \mapsto x^\alpha e^{-x}f(x)g(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions continues.
   Pour tout $x > 0$, $0 \leq |x^\alpha e^{-x}f(x)g(x)| = x^\alpha e^{-x}|f(x)g(x)| \leq x^\alpha e^{-x}\dfrac{f^2(x)+g^2(x)}{2}$. Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}\frac{f^2(x)+g^2(x)}{2}dx$ converge comme combinaison linéaire d'intégrales convergentes (car $f,g \in E_\alpha$), donc, par comparaison d'intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |x^\alpha e^{-x}f(x)g(x)|dx$ converge, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}f(x)g(x)dx$ est absolument convergente, donc convergente.

10. • $E_\alpha \subset \mathcal{C}([0,+\infty[,\mathbb{R})$ par définition de E_α.
    • La fonction nulle est dans E_α, donc $E_\alpha \neq \varnothing$.
    • Pour tout $(f,g) \in E_\alpha$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f + g \in E_\alpha$ car :
    — $\lambda f + g$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ comme combinaison linéaire de fonctions continues.

— pour tout $x \geq 0$,
$$x^\alpha e^{-x}((\lambda f+g)(x))^2 = \lambda^2 x^\alpha e^{-x} f(x)^2 + 2\lambda x^\alpha e^{-x} f(x)g(x) + x^\alpha e^{-x} g(x)^2,$$
donc
$$\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}((\lambda f+g)(x))^2 dx = \lambda^2 \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 dx + 2\lambda \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)g(x)dx + \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} g(x)^2 dx$$
converge comme combinaison linéaire d'intégrales convergentes.

• E_α est donc bien un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0,+\infty[,\mathbb{R})$.

11. Soit p une fonction polynomiale sur $[0,+\infty[$. Alors :
— p est continue sur $\mathbb{R}_+$, car polynomiale.
— En posant $p^2 : x \mapsto \sum_{k=0}^{d} a_k x^k$ (possible car p^2 est encore polynomiale) on a, pour tout $x > 0$,
$$x^\alpha e^{-x} p(x)^2 = \sum_{k=0}^{d} a_k x^{\alpha+k} e^{-x},$$
donc
$$\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} p(x)^2 = \sum_{k=0}^{d} a_k \int_0^{+\infty} x^{\alpha+1+k-1} e^{-x} dx = \sum_{k=0}^{d} a_k \Gamma(\alpha+1+k)$$
est convergente comme combinaison linéaire d'intégrales convergentes (car $\underbrace{\alpha+1}_{>0} + k > 0$).

On a donc bien $p \in E_\alpha$.

12. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme prosuit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$.
On a
$$\begin{aligned}
&\varphi_0 : x \mapsto x^\alpha e^{-x},\\
&\quad \text{donc } \psi_0 : x \mapsto x^{-\alpha} e^x \varphi_0^{(0)}(x) = 1,\\
&\varphi_1 : x \mapsto x^{\alpha+1} e^{-x},\\
&\quad \text{donc } \varphi_1^{(1)} : x \mapsto (\alpha+1)x^\alpha e^{-x} - x^{\alpha+1}e^{-x},\\
&\quad \text{donc } \psi_1 : x \mapsto x^{-\alpha} e^x \varphi_1^{(1)}(x) = (\alpha+1) - x,\\
&\varphi_2 : x \mapsto x^{\alpha+2} e^{-x},\\
&\quad \text{donc } \varphi_2^{(1)} : x \mapsto (\alpha+2)x^{\alpha+1} e^{-x} - x^{\alpha+2}e^{-x},\\
&\quad \text{donc } \varphi_2^{(2)} : x \mapsto (\alpha+2)(\alpha+1)x^\alpha e^{-x} - 2(\alpha+2)x^{\alpha+1}e^{-x} + x^{\alpha+2}e^{-x},\\
&\quad \text{donc } \psi_2 : x \mapsto x^{-\alpha} e^x \varphi_2^{(2)}(x) = (\alpha+2)(\alpha+1) - 2(\alpha+2)x + 1.
\end{aligned}$$

13. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, posons $g_a : x \mapsto x^a$.
g_a est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, par récurrence immédiate,
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x > 0, \quad g_a^{(k)}(x) = \left(\prod_{i=0}^{k-1}(a-i)\right) x^{a-k}$$
où, par convention, le produit vide (pour $k = 0$) vaut 1. Posons aussi $h : t \mapsto e^{-t}$.
h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et,
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x > 0, \quad h^{(k)} = (-1)^k e^{-t}.$$
D'où, comms $\varphi_n = g_{n+\alpha} h$, on a, d'après la formule de Leibniz, pour tout $x > 0$,
$$\begin{aligned}
\varphi_n^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g_{n+\alpha}^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x)\\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k}(-1)^{n-k} x^{n+\alpha-k} e^{-x} \prod_{i=0}^{k-1}(n+\alpha-i)\right),
\end{aligned}$$
donc
$$\begin{aligned}
\psi_n : x \mapsto\ & x^{-\alpha} e^x \varphi_n^{(n)}(x)\\
&= x^{-\alpha} e^x \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k}(-1)^{n-k} x^{n+\alpha-k} e^{-x} \prod_{i=0}^{k-1}(n+\alpha-i)\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k}(-1)^{n-k} \prod_{i=0}^{k-1}(n+\alpha-i)\right) x^{n-k}
\end{aligned}$$

donc ψ_n est bien polynomiale sur $\mathbb{R}_+^*$ et, comme

$$\binom{n}{0}(-1)^{n-0}\prod_{i=0}^{0-1}(n+\alpha-i) = (-1)^n \neq 0,$$

son degré est n et son coefficient dominant est $(-1)^n$.

14. • Pour tout $(f,g) \in E_\alpha^2$, $\langle f,g\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)g(x)dx$ existe d'après la question 9.
• Pour tout $(f,g,h) \in E_\alpha^3$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\langle \lambda f + g, h\rangle &= \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}(\lambda f(x) + g(x))h(x)dx \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)h(x)dx + \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} g(x)h(x)dx \quad \text{(par linéarité de l'intégrale convergente)} \\ &= \lambda \langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle,\end{aligned}$$

donc $\langle .,.\rangle$ est linéaire à gauche.
• Pour tout $(f,g) \in E_\alpha^2$,

$$\langle f,g\rangle = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)g(x)dx = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} g(x)f(x)dx = \langle g,f\rangle,$$

donc $\langle .,.\rangle$ est symétrique.
• $\langle .,.\rangle$ est linéaire à gauche et symétrique, donc bilinéaire.
• Pour tout $f \in E_\alpha$, pour tout $x > 0$, $x^\alpha e^{-x} f(x)g(x) \geq 0$, donc, par positivité de l'intégrale convergente ("$0 \leq +\infty$"), on a :

$$\langle f,f\rangle = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 dx \geq 0.$$

De plus, comme $x \mapsto x^\alpha e^{-x} f(x)^2$ est continue positive, comme $0 < +\infty$ et comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 dx$ converge, on a

$$\begin{aligned}\langle f,f\rangle = 0 &\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 dx = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x > 0, \quad x^\alpha e^{-x} f(x)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x > 0, \quad f(x) = 0,\end{aligned}$$

donc $\langle .,.\rangle$ est défini positif.
• $\langle .,.\rangle$ est donc bien un produit scalaire sur E_α.

15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
• D'après les calculs faits à la question 13, on a, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\varphi_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k}\left(\binom{k}{i}(-1)^{k-i} x^{n+\alpha-i} e^{-x} \prod_{j=0}^{i-1}(n+\alpha-j)\right).$$

Pour tout $i \in [\![0,k]\!] \subset [\![0,n-1]\!]$, $n+\alpha-i \geq \alpha+1 > 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} x^{n+\alpha-i} = 0$, donc

$$\varphi_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k}\left(\underbrace{\binom{k}{i}(-1)^{k-i}\prod_{j=0}^{i-1}(n+\alpha-j)}_{\text{constante par rapport à } x}\ \underbrace{x^{n+\alpha-i}}_{\to 0}\ \underbrace{e^{-x}}_{\to 0}\right) \underset{x\to 0}{\to} 0$$

comme somme finie (nombre de termes indépendant de x) de termes de limite nulle.
• De plus,

$$\frac{\varphi_n^{(k)}(x)}{e^{-x/2}} = \sum_{i=0}^{k}\left(\underbrace{\binom{k}{i}(-1)^{k-i}\prod_{j=0}^{i-1}(n+\alpha-j)}_{\text{constante par rapport à } x}\ \underbrace{x^{n+\alpha-i}e^{-x/2}}_{\to 0 \text{ par croissances comparées}}\right) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$$

comme somme finie (nombre de termes indépendant de x) de termes de limite nulle, donc on a bien

$$\varphi_n^{(k)}(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{-x/2}).$$

16. • Soit m et n deux entiers naturels.
Montrons par récurrence que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

$$\langle \psi_m, \psi_n\rangle = (-1)^k \int_0^{+\infty} \psi_m^{(k)}(x)\varphi_n^{(n-k)}(x)dx \qquad (HR_k).$$

Initialisation : Par définition de ψ_n et $\langle .,. \rangle$, on a

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} \psi_m(x)\psi_n(x)dx = \int_0^{+\infty} \psi_m(x)\varphi_n^{(n)}(x)dx,$$

donc on a bien HR_0.
Hérédité : Soit $k \in [[0, n-1]]$ et supposons HR_k vérifiée.
Alors $\int_0^{+\infty} \psi_m^{(k)}(x)\varphi_n^{(n-k)}(x)dx$ converge.
Posons alors $u(x) = \psi_m^{(k)}(x)$, $u'(x) = \psi_m^{(k+1)}(x)$, $v'(x) = \varphi_{(n-k)}(x)$, $v(x) = \varphi_{(n-k-1)}(x)$ (avec $n-k-1 \geq 0$).
u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
ψ_m est polynomiale sur $\mathbb{R}_+$, donc $\psi_m^{(k)}$ est polynomiale sur $\mathbb{R}_+$, donc
— $\psi_m^{(k)}$ a une limite finie en 0, donc comme $\varphi_n^{(n-k)}$ a une limite nulle en 0 d'après la question précédente, on a

$$\lim_{x\to 0} u(x)v(x) = \lim_{x\to 0} \psi_m^{(k)}(x)\varphi_n^{(n-k)}(x) = 0.$$

— et $u(x)v(x) = \psi_m^{(k)}(x)o(e^{-x/2}) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ par croissances comparées.
Enfin, $\int_0^{+\infty} u(x)v'(x)dx$ converge, donc, par intégration par parties, $\int_0^{+\infty} u'(x)v(x)dx$ converge et

$$\begin{aligned}
\langle \psi_m, \psi_n \rangle &= (-1)^k \int_0^{+\infty} \psi_m^{(k)}(x)\varphi_n^{(n-k)}(x)dx \\
&= (-1)^k \left(\left[\psi_m^{(k)}(x)\varphi_n^{(n-k)}(x) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \psi_m^{(k+1)}(x)\varphi_n^{(n-k-1)}(x)dx \right) \\
&= (-1)^k \left(0 - \int_0^{+\infty} \psi_m^{(k+1)}(x)\varphi_n^{(n-k-1)}(x)dx \right) = (-1)^{k+1} \int_0^{+\infty} \psi_m^{(k+1)}(x)\varphi_n^{(n-k-1)}(x)dx
\end{aligned}$$

On a donc bien HR_{k+1}.
Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $k \in [[0, n]]$,

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle = (-1)^k \int_0^{+\infty} \psi_m^{(k)}(x)\varphi_n^{(n-k)}(x)dx,$$

donc, en particulier, pour $k = n$, on a bien :

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle = (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x)\varphi_n(x)dx.$$

• Soient m et n deux entiers naturels tels que $m \neq n$, et, quitte à intervertir les rôles, supposons que $m < n$. Alors, d'après le premier point, on a

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle = (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x)\varphi_n(x)dx.$$

Or ψ_m est une fonction polynomiale de degré $m < n$, donc $\psi_m^{(n)} = 0$, donc

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle = (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x)\varphi_n(x)dx = \int_0^{+\infty} 0dx = 0.$$

La famille $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien orthogonale pour le produit scalaire $\langle .,. \rangle$.

17. D'après la question précédente,

$$\|\psi_n\|_\alpha^2 = \langle \psi_n, \psi_n \rangle = (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_n^{(n)}(x)\varphi_n(x)dx.$$

Or ψ_n est une fonction polynomiale de degré n à coefficient dominant $(-1)^n$, donc pour tout $x \geq 0$, $\psi_n^{(n)}(x) = (-1)^n n!$, donc

$$\begin{aligned}
\|\psi_n\|_\alpha^2 &= (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_n^{(n)}(x)\varphi_n(x)dx = (-1)^n \int_0^{+\infty} (-1)^n n! \varphi_n(x)dx \\
&= n! \int_0^{+\infty} x^{n+\alpha} e^{-x} dx = n!\Gamma(n+\alpha+1).
\end{aligned}$$

III. Approximation

18. De la même façon qu'à la question 16, on peut montrer par récurrence que, pour tout $i \in [[0, n]]$,

$$\begin{aligned}
\langle \psi_n, f_k \rangle &= (-1)^i \int_0^{+\infty} \varphi_n^{(n-i)}(x) f_k^{(i)}(x)dx = (-1)^i \int_0^{+\infty} \varphi_n^{(n-i)}(x)(-k)^i e^{-kx} dx \\
&= k^i \int_0^{+\infty} \varphi_n^{(n-i)}(x) e^{-kx} dx,
\end{aligned}$$

donc, en particulier, pour $i = n$, on obtient

$$\begin{aligned}
\langle \psi_n, f_k\rangle &= k^n \int_0^{+\infty} \varphi_n(x) e^{-kx} dx = k^n \int_0^{+\infty} x^{n+\alpha} e^{-(k+1)x} dx \\
&= k^n \int_0^{+\infty} \frac{u^{n+\alpha}}{(k+1)^{n+\alpha}} e^{-u} \frac{du}{k+1} \quad \text{(changement de variable } u = (k+1)x\ \mathcal{C}^1 \text{ strictement croissant bijectif...)} \\
&= \frac{1}{(k+1)^{\alpha+1}} \left(\frac{k}{k+1}\right)^n \int_0^{+\infty} u^{n+\alpha} e^{-u} du = \frac{1}{(k+1)^{\alpha+1}} \left(\frac{k}{k+1}\right)^n \Gamma(n+\alpha+1).
\end{aligned}$$

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après la question 17,

$$\begin{aligned}
\frac{\langle f_k, \psi_n\rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} &= \frac{\left(\frac{1}{(k+1)^{\alpha+1}} \left(\frac{k}{k+1}\right)^n \Gamma(n+\alpha+1)\right)^2}{n!\Gamma(n+\alpha+1)} \\
&= \frac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}} \left(\left(\frac{k}{k+1}\right)^2\right)^n \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \\
&= \frac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}} a_n \left(\left(\frac{k}{k+1}\right)^2\right)^n \quad \text{(où } a_n \text{ a été introduit à la question 3)}
\end{aligned}$$

donc, d'après les questions 3 et 4, comme $\left(\frac{k}{k+1}\right)^2 \in]-1, 1[$,

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\langle f_k, \psi_n\rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} = \frac{1}{(k+1)^{2\alpha}} \sum_{n\geq 0} a_n \left(\left(\frac{k}{k+1}\right)^2\right)^n$$

converge et

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\langle f_k, \psi_n\rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} &= \frac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(\left(\frac{k}{k+1}\right)^2\right)^n \\
&= \frac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(1 - \left(\frac{k}{k+1}\right)^2\right)^{\alpha+1}} \\
&= \frac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(\frac{2k+1}{(k+1)^2}\right)^{\alpha+1}} \\
&= \frac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}} \frac{\Gamma(\alpha+1)(k+1)^{2\alpha+2}}{(2k+1)^{\alpha+1}} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2k+1)^{\alpha+1}}.
\end{aligned}$$

19. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, V_N est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E_α, et $\left(\frac{\psi_n}{\|\psi_n\|_\alpha}\right)_{n\in[[0,N]]}$ en est une base orthonormée, donc, d'après la question 7,

$$\begin{aligned}
\|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha^2 &= \|f_k\|^2 - \sum_{n=0}^{N} \left\langle f_k, \frac{\psi_n}{\|\psi_n\|_\alpha}\right\rangle^2 \\
&= \|f_k\|^2 - \sum_{n=0}^{N} \frac{\langle f_k, \psi_n\rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2}.
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\|f_k\|_\alpha^2 &= \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} e^{-2kx} dx \\
&= \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-(2k+1)x} dx \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{(2k+1)^\alpha} e^{-u} \frac{du}{2k+1} \quad \text{(changement de variable affine } u = (2k+1)x) \\
&= \frac{1}{(2k+1)^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u} du \qquad = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2k+1)^{\alpha+1}}.
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha^2 &= \|f_k\|^2 - \sum_{n=0}^{N} \frac{\langle f_k, \psi_n\rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2k+1)^{\alpha+1}} - \sum_{n=0}^{N} \frac{\langle f_k, \psi_n\rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} \\
&\underset{N\to+\infty}{\to} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2k+1)^{\alpha+1}} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\langle f_k, \psi_n\rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2k+1)^{\alpha+1}} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2k+1)^{\alpha+1}} = 0,
\end{aligned}$$

donc on a bien $\lim\limits_{N\to+\infty} \|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha = 0$.

20. D'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $N \geq N_0$, $\|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha \leq \varepsilon$.
En particulier, pour $N = N_0$, on a $\|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha \leq \varepsilon$, et $\pi_N(f_k) \in V_N = \mathrm{Vect}((\psi_n)_{0\leq n\leq N} \subset \mathcal{P}$ comme espace vectoriel engendré par des éléments de $\mathcal{P}$, donc $p = \pi_N(f_k)$ convient.

21. Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto \begin{cases} f(-\ln t) & \text{si } t \in]0,1] \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$.
g est continue sur $]0,1]$ par opérations sur les fonctions continues.
De plus, $\lim\limits_{t\to 0} g(t) = \lim\limits_{t\to 0} f\underbrace{(-\ln t)}_{\to+\infty} = 0 = g(0)$ (par hypothèse sur f), donc g est aussi continue en 0 et, par suite, sur $[0,1]$.

Alors, d'après le théorème admis, il existe une fonction polynomiale $p : t \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k t^k$ telle que pour tout $t \in [0,1]$, $|g(t) - p(t)| \leq \varepsilon$.
On a alors, pour tout $x > 0$, comme $e^{-x} \in]0,1]$,

$$\begin{aligned}
\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k(x) \right| &= \left| f(-\ln(e^{-x})) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (e^{-x})^k \right| \\
&= |g(e^{-x}) - p(e^{-x})| \leq \varepsilon,
\end{aligned}$$

donc $\left(f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k f_k(x) \right)^2 \leq \varepsilon^2$.
On a donc, pour tout $x > 0$,

$$0 \leq x^\alpha e^{-x} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k(x) \right)^2 \leq x^\alpha e^{-x} \varepsilon^2,$$

donc, apr positivité de l'intégrale convergente (avec $0 \leq +\infty$), on a

$$0 \leq \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k(x) \right)^2 dx = \left\| f - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k \right\|_\alpha^2 \leq \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} \varepsilon^2 = \varepsilon^2 \Gamma(\alpha+1).$$

En remplaçant ε par $\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\Gamma(\alpha+1)}}$ dans le théorème admis, on a alors $\left\| f - \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k f_k \right\|_\alpha^2 \leq \varepsilon^2$, donc $\left\| f - \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k f_k \right\|_\alpha \leq \varepsilon$.

22. Soit f vérifiant les hypothèses et $\varepsilon > 0$.
D'après la question précédente, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(\lambda_k)_{0\leq k\leq n}$ tels que

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k \right\|_\alpha \leq \varepsilon.$$

De plus, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, d'après la question 20, il existe $p_k \in \mathcal{P}$ tel que $\|f_k - p_k\|_\alpha \leq \varepsilon$, et on a alors

$$\begin{aligned}
\left\| f - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k p_k \right\|_\alpha &= \left\| f - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k + \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (f_k - p_k) \right\|_\alpha \\
&\leq \left\| f - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k \right\|_\alpha + \sum_{k=0}^{n} |\lambda_k| \, \|f_k - p_k\|_\alpha \quad \text{(inégalité triangulaire)} \\
&\leq \varepsilon + \sum_{k=0}^{n} |\lambda_k| \varepsilon = \left(1 + \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \right) \varepsilon.
\end{aligned}$$

en posant $p = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k p_k \in \mathcal{P}$, on a bien (quitte à remplacer ε par $\varepsilon / \left(1 + \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k \right)$ au début de la réponse),

$$\|f - p\|_\alpha \leq \varepsilon.$$

23. Soit $f : x \in [0, +\infty[\mapsto h(\sqrt{x})e^{x/2}$.
h est continue sur $\mathbb{R}_+$ et a une limite nulle en $+\infty$ (car elle est nulle sur $]A^2, +\infty[$, donc, d'après la question 22, pour tout $\alpha > -1$, il existe $p \in \mathcal{P}$ telle que

$$\|f - p\|_\alpha \leq \varepsilon.$$

Or

$$\begin{aligned}
\|f-p\|_\alpha &= \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}(f(x)-p(x))^2 dx = \int_0^{+\infty} x^\alpha (f(x)e^{-x/2} - p(x)e^{-x/2})^2 dx \\
&= \int_0^{+\infty} x^\alpha (h(\sqrt{x}) - p(x)e^{-x/2})^2 dx \\
&= \int_0^{+\infty} t^{2\alpha}(h(t) - p(t^2)e^{-t^2/2})^2 2t dt
\end{aligned}$$

en posant le changement de variable $t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2$.
Ce changement de variable est de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissant sur $\mathbb{R}_+^*$ et réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Alors, en prenant $\alpha = -1/2$ (et le p correspondant à cette valeur de α) et $q : t \in \mathbb{R} \mapsto p(t^2)$, qui est une fonction polynomiale paire, on a

$$\begin{aligned}
\|f-p\|_{-1/2} &= \int_0^{+\infty} t^{2\alpha}(h(t) - p(t^2)e^{-t^2/2})^2 2t dt = 2\int_0^{+\infty} (h(t) - q(t)e^{-t^2/2})^2 dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(h(x) - q(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^2 dx,
\end{aligned}$$

donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(h(x) - q(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^2 dx = \|f-p\|_{-1/2} \leq \varepsilon.$$