Interrogation de cours n°4

Nom : ....

Q1 [0 ou 5 points] — Soient X un ensemble non vide, $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}(X,\mathbf{C})^{\mathbf{N}}$ et $f \in \mathcal{F}(X,\mathbf{C})$. Donner la définition de l'assertion « la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur X ».

Q2 [0 ou 5 points] — Soient X un ensemble non vide et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}(X,\mathbf{C})^{\mathbf{N}}$. On suppose que la série de fonctions converge normalement sur X. En donner trois conséquences en termes de convergence (aucune ne mettant en jeu un mode de convergence « sur tout segment »).

1.

2.

3.

Q3 [0 ou 5 points] — Énoncer le théorème de Weierstaß.

Q4 [0 ou 5 points] — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on définit la fonction f_n par

$$f_n \left| \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^n}{1-x^n} \end{array} \right.$$

Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de $]-1,1[$.