Exercice 22 : Soit $r \in [0, 1[$, $t \in \mathbb{R}$,

existence et valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n n \cos(nt)$:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & r^n \cos(nt) \end{array} \right.$$

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est $\mathcal{C}^0$.

(2) Montrons que $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ - ce qui livrera la convergence uniforme sur tout segment :

Soit $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$,

$$|f(t)| \leq r^n n .$$

Par croissances comparées :

$$\frac{r^n n}{r^{\frac{1}{2}n}} = n\, r^{\frac{1}{2}n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

(Dans le cas où $r = 0$, la somme de la série existe et vaut 0.)

Par passage au sup. en t dans $\mathbb{R}$:

$$0 \leq \| f_n \|_{\infty, \mathbb{R}} \leq r^n n = o(\underbrace{r^{\frac{1}{2}n}}_{\geq 0})$$

Or, la série $\sum r^{\frac{1}{2}n}$ converge,
car $-1 < r < 1$.

Donc d'après le théorème de comparaison, $\sum f_n$ converge normalement.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Étant donné (1) et (2), le théorème d'intégration terme à terme nous livre :

· $\sum \int_0^a f_n(t)dt$ converge

· $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[0, a]$

· $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^a r^n n\cos(nt)dt$
$= \int_0^a \sum_{n=0}^{+\infty} r^n n\cos(nt)\, dt$

où $\int_0^a r^n n\cos(nt)\, dt = r^n \sin(na)$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n \sin(na) = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (re^{ia})^n\right)$$

$$= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{1-re^{ia}}\right)$$

$$= \mathrm{Im}\left(\frac{1-re^{-ia}}{1-2r\cos(a)+r^2}\right)$$

$$= \frac{r\sin(a)}{1-2r\cos(a)+r^2}.$$

D'après le théorème fondamental de l'analyse :

$$g : a \longmapsto \int_0^a \sum_{n=0}^{+\infty} r^n n\cos(nt)dt$$

$$\left(= \frac{r\sin(a)}{1-2r\cos(a)+r^2}\right)$$

est une primitive de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

Donc, $\forall a \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n n\cos(an) = g'(a)$$

$$= \frac{r\cos(a)(1-2r\cos(a)+r^2) - 2r^2\sin(a)^2}{(1-2r\cos(a)+r^2)^2}.$$

Exercice 2 : $S : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$

1) Montrons que S est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \longmapsto \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$

(1) Toutes les f_n sont continues sur $\mathbb{R}_+$.

(2) Montrons que $\sum f_n$ converge uniformément ~~sous~~ tout segment sur $\mathbb{R}_+$:

Nous montrerons plutôt de la convergence normale :

Soit $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^+$,

$$|f_n(x)| = \left| \frac{e^{-nx}}{1+n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

indépendant de x

Donc par passage au sup. sur $x \in \mathbb{R}_+$:

$$0 \leq \| f_n \|_{\infty, \mathbb{R}_+} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Or, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge d'après le critère de Riemann.

Donc par théorème de comparaison des séries à termes positifs :

$\sum \|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+}$ converge.

Donc $\sum f_n$ converge normalement.

Par théorème de la double limite :

$S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

2) Montrons que S est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, et $\forall x \in \mathbb{R}_+$:

$$f_n'(x) = \frac{-ne^{-nx}}{1+n^2}$$

(2) Montrons que $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment sur $\mathbb{R}_+^*$:

Soit $[\alpha ; \beta] \subset \mathbb{R}_+^*$, $(\alpha > 0)$
$x \in [\alpha, \beta]$,
$n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n'(x)| = \frac{n(e^{-x})^n}{1+n^2} \leq \underbrace{\frac{n(e^{-\alpha})^n}{1+n^2}}_{\text{indépendant de } x}$$

Or, $ne^{-\alpha n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, (croissances comparées)

donc $\frac{ne^{-\alpha n}}{1+n^2} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, où $\frac{1}{n^2} \geqslant 0$.

De plus, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge d'après le critère de Riemann.

Donc par théorème de comparaison,

$\sum f_n'$ converge normalement sur $[\alpha, \beta]$.

Donc $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment sur $\mathbb{R}_*^+$.

Donc d'après le critère $\mathcal{C}^1$,

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_*^*,$$

et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-ne^{-nx}}{1+n^2}$.

3) Montrons que S n'est pas dérivable en 0 à droite - en 0^+ :

On pose $\tau : x \mapsto \frac{S(x) - S(0)}{x - 0}$.

Raisonnons par l'absurde : on suppose $\exists l \in \mathbb{R}$, $\tau(x) \xrightarrow[x \to 0]{} l$:

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad Z(x) \leq \sum_{n=0}^{N} \frac{e^{-nx} - 1}{x(1+n^2)}$$

(Les termes de la somme sont tous négatifs)

Par passage à la limite : $(x \to 0^+)$

$$\ell \leq -\sum_{n=0}^{N} \frac{n}{1+n^2} \quad \left(\frac{e^{-nx} - 1}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} -n \right)$$

Par passage à la limite : $(N \to +\infty)$

$\ell \leq -\infty$ ↯

Exercice 9 : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}^- & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k} \end{array} \right.$

$f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$

1) Montrons que f est bien définie :

Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}^-$. Montrons que la série $\sum f_n(x)$ converge :

Soit $n \in \mathbb{N}$, $|f_{n+1}(x)|, |f_n(x)| > 0$, et :

$$\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \left| \frac{1}{x+n+1} \right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 < 1$$

donc d'après le critère de d'Alembert, $\sum f_n(x)$ est absolument convergente.

2) Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}^-$,

$$f(x) = e \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)} :$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, $\exists! (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$F(X) := \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{(X+k)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(X+k)}.$$

Donc $\forall k \in [\![0; n]\!]$,

$$a_k = (F \times (X+k))(-k) = \left(\prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j-k}\right)\left(\prod_{j=k+1}^{n} \frac{1}{j-k}\right)$$

$$= (-1)^k \cdot \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{(n-k)!}$$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{x+k}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{(-1)^k}{(x+k)k!}}_{a_k} \cdot \underbrace{\frac{1}{(n-k)!}}_{\cancel{b_k}\ b_{n-k}}$$

- $\sum |b_n|$ converge et vaut e.

- $$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{n} \frac{(x+n)}{(x+n+1)}$$

$$\underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 < 1$$

Donc d'après le critère de d'Alembert, $\sum a_n$ est absolument convergente.

Par produit de Cauchy :

$$f(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\right)$$

$$= e \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)n!}.$$

3) On pose :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ g_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}^- & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{(-1)^n}{(x+n)\,n!} \end{array}\right.$$

Soit $k\in\mathbb{N}^*$,

(1) $\forall n\in\mathbb{N}$, g_n est $\mathcal{C}^k$ sur $]0;+\infty[\ \cup \bigcup_{m\in\mathbb{N}}]-m-1;-m[$,

et $\forall \ell\in[\![0;k]\!]$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}^-$,

$$g_n^{(\ell)}(x) = \frac{(-1)^{n+\ell}\,\ell!}{n!\,(x+n)^{\ell+1}}$$

(à montrer par une récurrence)

(2) Soit $\ell\in[\![0;k-1]\!]$, $n\in\mathbb{N}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$,

$$|g_n^{(\ell)}(x)| = \ell!\left|\frac{1}{n!\,(x+n)^{\ell+1}}\right|,$$

donc $\sum |g_n^{(\ell)}(x)|$ converge par d'Alembert (à rédiger).

(3) • Soit $[a,b] \subset]0;+\infty[$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [a,b]$,

$$|g_n^{(k)}(x)| = \frac{k!}{n!} \frac{1}{\underbrace{(x+n)}_{>0}{}^{k+1}}$$

$g_n^{(k)}$ décroissante et positive sur $[a,b]$,

donc $$\|g_n^{(k)}\|_{\infty,[a,b]} = \underbrace{\frac{k!}{n!} \frac{1}{(a+n)^{k+1}}}_{a_n}$$

• Soit $[a,b] \subset]-m-1, -m[$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [a,b]$,

$$|g_n^{(k)}(x)| = \frac{k!}{n!} \frac{1}{|\underbrace{x+n}_{\text{signe constant sur } [a,b]}|^{k+1}}$$

$$\leq \underbrace{|g_n^{(k)}(a)| + |g_n^{(k)}(b)|}_{b_n}$$

(a_n) et (b_n) sont chacun le terme général d'une série convergente (à prouver). Donc par théorème de comparaison, $\sum g_n^{(k)}$ converge normalement, a fortiori uniformément sur tout segment sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$. Le critère $\mathcal{C}^k$ s'applique alors :

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, f est $\mathcal{C}^k$. Donc f est $\mathcal{C}^\infty$.