TD Correction

Exercice 22 (Cours)

On pose $f_n : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto r^n \sin(nt) \end{array} \right.$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(H1) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_n'(t) = r^n n \cos(nt)$

(H2) Montrons que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in [0;1[$, $n \in \mathbb{N}$.

$$|f_n(x)| \leqslant r^n, \text{ or } 0 \leqslant r < 1 \text{ donc } \sum_{n \in \mathbb{N}} r^n \text{ converge}$$

Par théorème de domination, à des séries à termes positifs conv,
$\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ est absolument convergente, donc convergente.

(H3) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.
Soit $(x, n) \in [a, b] \times \mathbb{N}$.

$$|f_n'(x)| = r^n n |\cos(nx)| \leqslant \underbrace{r^n n}_{\text{indépendant de } x}$$

Par passage au sup sur $x \in [a, b]$, $\|f_n'\|_{\infty, [a,b]} \leqslant r^n n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

(par croissances comparées)

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann).
Donc par théorème de comparaison, $\sum \|f_n'\|_{\infty, [a,b]}$ converge

Donc $\sum f_n'$ converge normalement sur $[a,b]$, donc converge uniformément sur $[a,b]$.

Donc $\sum f_n'$ CUK sur $\mathbb{R}$, en particulier $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n'(x)$ existe pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Donc, • $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

• $\forall x\in\mathbb{R}$, $S'(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n'(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} r^n n\cos(nx)$

Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$S(x) = \operatorname{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(re^{ix})^n\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{1-re^{ix}}\right)$$

$$= \operatorname{Im}\left(\frac{1-r\cos(x)+i\sin(x)r}{(1-r\cos(x))^2+r^2\sin(x)^2}\right)$$

$$= \frac{r\sin(x)}{(1-r\cos(x))^2+\sin(x)^2r^2} = \frac{r\sin(x)}{1-2r\cos(x)+r^2\cos^2(x)+r^2\sin^2(x)}$$

Donc $$S'(x) = \frac{r\cos(x)(1+r^2-2r\cos(x))-r\sin(x)2r\sin(x)}{(1+r^2-2r\cos(x))^2}$$

$$= \frac{r\cos(x)+r^3\cos(x)-2r^2\cos^2(x)-2r^2\sin^2(x)}{(1+r^2-2r\cos(x))^2}$$

$$\boxed{= \frac{r\cos(x)+r^3\cos(x)-2r^2}{(1+r^2-2r\cos(x))^2}}$$

Scanned with CamScanner

Exercice 8

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{x^n}{1+x^n}}_{f_n(x)}$$

1) Soit $x \in \mathbb{R}$, nature de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

. Si $x > 1$, $f_n(x) \underset{n \to +\infty}{\sim} 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.

Donc $\sum f_n(x)$ diverge grossièrement

. Si $x = 1$, $f_n(x) = \frac{1}{2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{2}$

Donc $\sum f_n(x)$ diverge grossièrement

. Si $x = -1$, $f_n(x)$ est défini si n impair.

. Si $x < -1$, $f_n(x) \sim 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

Donc $\sum f_n(x)$ diverge grossièrement

. Si $x \in]-1;1[\setminus \{0\}$, 1ère solution :

Soit $n \in \mathbb{N}$, $$\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \frac{\left(\frac{|x^{n+1}|}{|1+x^{n+1}|}\right)}{\left(\frac{|x^n|}{|1+x^n|}\right)} = \frac{|x|\,(|1+x^n|)}{|1+x^{n+1}|}$$

Comme $|x| < 1$,

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} |x| < 1$$

Par d'Alembert, $\sum f_n(x)$ ACV donc CV.

2^e solution :

$|f_n(x)| \sim |x|^n$, or $|x|<1$ donc $\sum |f_n(x)|$ converge
donc $\sum f_n(x)$ converge

$x=0$: $\sum 0^n$ converge.

$\mathcal{D} =]-1;1[= I$

2) Mq f $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;1[$.

(H1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;1[$

et $\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times]-1;1[$, $f_n'(x) = \dfrac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}$

(H2) $\sum f_n$ CS sur $]-1;1[$ (cf Q1)

(H3) : Soit $[-a;a] \subset]-1;1[$ (avec $a \in [0;1[$)
Soit $(n,x) \in \mathbb{N} \times [-a;a]$.

$|f_n'(x)| = \dfrac{n|x|^{n-1}}{(1+x^n)^2}$, $\cdot$ $1-|x|^n \leqslant |1+x^n|$
$\cdot$ $|x|^n \leqslant |x| \leqslant a$.

Donc, $1-|x|^n \geqslant 1-a$ $(1-a \geqslant 0)$
Donc, $(1-|x|^n)^2 \geqslant (1-a)^2$

D'où $|f_n'(x)| \leqslant \underbrace{\dfrac{na^{n-1}}{(1-a)^2}}_{\text{indépendant de } x}$, donc $\|f_n'(x)\|_{\infty,[-a;a]} \leqslant \dfrac{na^{n-1}}{(1-a)^2}$

$\frac{na^{n-1}}{(1-a)^2} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (avec $\frac{1}{n^2} \geq 0$), par croissances comparées.

Par théorème de comparaison de séries à termes positifs ou nulles, comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge par Riemann,

$\sum \|f_n'\|_{\infty, [-a;a]}$ converge.

Donc $\sum f_n'$ CNK,
Donc $\sum f_n$ CUK

Par critère $\mathcal{C}^1$, (C1) : $f = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ est $\mathcal{C}^1$

(C2) $\forall x \in]-1;1[$, $f'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k'(x)$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{kx^{k-1}}{(1+x^k)^2}$$

3) Si $x \in [0;1[$, $f'(x) \geq 0$. Donc f croissante sur $[0;1[$.

Théorème de la limite monotone, $\ell = \lim_{x \to 1^-} f \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

$\forall x \in [0;1[$, $N \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n} \geq \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{1+x^n} \xrightarrow[x \to 1^-]{} \frac{N+1}{2}$$

$$\Big\downarrow x \to 1^-$$

$$\ell$$

Donc $\forall N \in \mathbb{N}$, $\ell \geq \frac{N+1}{2}$, d'où $\ell = +\infty$.

Rappel

$f : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^0$ sur $[0;+\infty[$, dérivable sur $]0;+\infty[$

$\left(\exists l \in \mathbb{R}, f'(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} l\right) \Rightarrow f$ dérivable en 0 et $f'(0) = l$

$f'(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \pm\infty \Rightarrow f$ non-dérivable en 0.

réciproque? Fausse

$g \,\Big|\, \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ $\quad$ g $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*, g'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Exercice 6

$x > 0$, existence et valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-nx}$.

- $\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times]0;+\infty[$, $ne^{-nx} = n\underbrace{\left(e^{-x}\right)}_{\in]0;1[}{}^n$

- Existence et valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} ny^n$, $y \in [0;1[$

Heuristique (pste)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ny^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d}{dy} y^n \overset{(*)}{=} \frac{d}{dy} \sum_{n=1}^{+\infty} y^n$$

Critère ?

$$= \frac{d}{dy}\frac{y}{1-y} = \frac{d}{dy}\left(-\frac{1-y+1}{1-y}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{1-y} - 1\right) = \frac{1}{(1-y)^2}$$

$f_n : y \mapsto y^n$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n = y \mapsto y^n$

H1 $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1[$.

et $\forall y \in [0;1[, f_n'(y) = n y^{n-1}$

H2 $\forall y \in [0;1[, \sum f_n(y)$ convergence (série géométrique, $|y|<1$)

H3 $\forall a \in [0;1[,$

croissances comparées

$$\|f_n\|_{\infty,[0;a]} = n a^{n-1} = o\Big(\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\geq 0}\Big)$$

$\sum f_n'$ CNK sur $[0;1[$, donc $\sum f_n'$ CVK sur $[0;1[$.
(à rédiger)

Le critère $\mathcal{C}^1$ s'applique,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f \left| \begin{array}{ccc} [0;1[& \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \dfrac{y}{1-y} \end{array} \right. \quad \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0;1[$$

$$\forall y \in [0;1[, \underbrace{\frac{d}{dy} \frac{y}{1-y}}_{\frac{1}{(1-y)^2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} n y^{n-1}$$