

TD – Suites et séries de fonctions 2

Exercice de la banque CCINP n°10. — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit la fonction f_n par

$$f_n : x \mapsto (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n + x}$$

1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.

2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n + x} dx$.

Exercice de la banque CCINP n°12. —

1. Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a, b]$ dans \mathbf{R} . On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f , et que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n est continue en x_0 , avec $x_0 \in [a, b]$. Démontrer que f est continue en x_0 .

2. On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$

$$g_n : x \mapsto x^n$$

La suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?

Exercice de la banque CCINP n°14. —

1. Soit a et b deux réels donnés avec $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$, à valeurs réelles.

Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f , alors la suite $\left(\int_a^b f_n(x) dx \right)_{n \in \mathbf{N}}$ converge

vers $\int_a^b f(x) dx$.

2. Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.

3. Démontrer que $\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Exercice de la banque CCINP n°16. — On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \forall x \in [0, 1] \quad u_n(x) = \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) - \frac{x}{n}$$

Si la série $\sum u_n(x)$ converge pour un réel $x \in [0, 1]$, on pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) - \frac{x}{n} \right]$.

1. Démontrer que S est définie sur $[0, 1]$.

2. On définit une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ par, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

(a) En utilisant $S(1)$ démontrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

(b) En déduire un équivalent simple de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Démontrer que S est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$ et calculer $S'(1)$.

Exercice de la banque CCINP n°18. — On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$

$$u_n : x \mapsto \frac{(-1)^n x^n}{n}$$

On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$.

1. Étudier la convergence simple de cette série.

On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.

2. (a) La fonction S est-elle continue sur D ?
- (b) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D .
- (c) Étudier la convergence uniforme de cette série sur $[0, 1]$.

Exercice de la banque CCINP n°48. — $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbf{R} . Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \int_0^1 t^n f(t) \, dt = 0$$

1. Énoncer le théorème de Weierstrass d'approximation par des fonctions polynomiales.
2. Soit (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur le segment $[0, 1]$ vers f .
 - (a) Montrer que la suite de fonctions $(P_n f)$ converge uniformément sur le segment $[0, 1]$ vers f^2 .
 - (b) Démontrer que

$$\int_0^1 f^2(t) \, dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 P_n(t) f(t) \, dt$$

(c) Calculer $\int_0^1 P_n(t) f(t) \, dt$.

3. En déduire que f est la fonction nulle sur le segment $[0, 1]$.

Exercice de la banque CCINP n°53. — On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur \mathbf{R} par

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad f_n(x) = \frac{x}{1 + n^4 x^4}$$

1. (a) Prouver que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur \mathbf{R} . On pose alors

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

- (b) Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $0 < a < b$. $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a, b]$? sur $[a, +\infty[$?

- (c) $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0, +\infty[$?

2. Prouver que f est continue sur \mathbf{R}^* .

3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Exercice 1 ★☆☆ — Soit la fonction

$$f: x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^2 + x^2}}$$

1. Démontrer que la fonction f est définie sur \mathbf{R} .
2. Démontrer que la fonction f est continue sur \mathbf{R} .
3. Étudier la limite éventuelle de la fonction f en $+\infty$.

continuiteLimiteSommeSerieFonctions

Exercice 2 ★☆☆ — On considère la fonction

$$S: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1 + n^2}$$

1. Démontrer que la fonction S est définie et continue sur \mathbf{R}_+ .
2. Démontrer que la fonction S est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbf{R}_+^* .
3. Démontrer que la fonction S n'est pas dérivable en 0 à droite.

regulariteSommeSerieFonctions1

Exercice 3 ★☆☆ — Posons, pour tout nombre entier $n \geq 2$

$$f_n \left| \begin{array}{l}]0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \frac{x e^{-nx}}{\ln(n)} \end{array} \right.$$

Démontrer que $\sum_{n=2}^{+\infty} f_n$ est bien définie sur $]0, +\infty[$, est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$, mais n'est pas dérivable en 0 à droite.

regulariteSommeSerieFonctions2 [indication(s)]

Exercice 4 ★☆☆ — Soit S la fonction définie par

$$S \left| \begin{array}{l}]0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} \end{array} \right.$$

1. Justifier que la fonction S est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.
2. Préciser le sens de variation de la fonction S .
3. Démontrer que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $S(x+1) + S(x) = \frac{1}{x}$.
4. Donner un équivalent de S en 0.
5. Donner un équivalent de S en $+\infty$.

regulariteEquationFonctionnelleEquivalentSommeSerieFonctions [indication(s)]

Exercice 5 ★☆☆ — Soit $a \in]-1, 1[$. Démontrer que la fonction

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(a^n x) \end{array} \right.$$

est bien définie et de classe \mathcal{C}^∞ .

sommeSerieFonctionsIndefinimentDerivable

Exercice 6 ★★★ — Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-nx}$, pour tout $x > 0$.

calculSommeSerie [indication(s)]

Exercice 7 ★★★ — Soient a, b des réels tels que $a < b$. Notons $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions sur $[a, b]$ telle que $f_0 \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in [a, b]$

$$f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t) dt$$

1. Démontrer que la série de fonctions de terme général f_n converge normalement sur $[a, b]$.
2. Déterminer la somme de cette série.

suitePrimitivesIterees [indication(s)]

Exercice 8 ★★★ — Soit la fonction

$$f: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Démontrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur son domaine de définition.
3. Étudier la limite éventuelle de $f(x)$ quand x tend vers 1.

regulariteLimiteSommeSerieFonctions

Exercice 9 ★★★ — Posons

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}^- \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{k=0}^n \frac{1}{x+k} \end{array} \right.$$

1. Démontrer que f est bien définie.
2. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}^-$, $f(x) = e \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.
3. En déduire que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}^-$.

sommeSerieFonctionsProduitIndefinimentDerivable [indication(s)]

Exercice 10 ★★★ — Posons, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$

$$f_n \left| \begin{array}{l}]0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{n+n^2x} \end{array} \right.$$

1. Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$. On note

$$f \left| \begin{array}{l}]0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \end{array} \right.$$

sa somme.

2. Démontrer que la fonction f est continue sur $]0, +\infty[$.
3. Déterminer la limite, ainsi qu'un équivalent simple, de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
4. Déterminer la limite, ainsi qu'un équivalent simple, de $f(x)$ quand x tend vers 0^+ .

continuiteLimiteEquivalentSommeSerieFonctions [indication(s)]

Exercice 11 ★★★ — Posons

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2} := \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N \frac{1}{(x+n)^2} \end{array} \right.$$

1. Démontrer que f est bien définie sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$. Est-elle périodique ?
2. Étudier la continuité de f .

Posons

$$g: x \mapsto \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$$

3. Déterminer le domaine de définition de g .
4. Démontrer que la fonction $h := f - g$ admet un prolongement continu \mathbf{R} .
5. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $h\left(\frac{x}{2}\right) + h\left(\frac{x+1}{2}\right) = 4h(x)$.
6. En déduire que $f = g$ et, donc que

$$\forall x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z} \quad \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2}$$

equationFonctionnelleDeveloppementSerieFonctionsIndexeeZ [indication(s)]

Exercice 12 ★★★ — On considère la fonction

$$f \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n} \end{array} \right.$$

1. Démontrer que la fonction f est définie et continue sur \mathbf{R} .
2. Étudier la dérivabilité de la fonction f en 0.

uneFonctionWeierstrass [indication(s)]

Exercice 13 ★★★ —

L'objectif de cet exercice est de construire une fonction continue sur $[0, 1]$, nulle part dérivable sur $[0, 1]$. Ensuite on établit que ces fonctions, étranges de prime abord, abondent dans la nature, puisqu'elles forment une partie dense de $(\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Le cœur du travail porte sur l'étude d'une fonction définie par Teiji Takagi en 1903 dans son article *A simple example of the continuous function without derivative*, initialement paru dans les *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan*, ser II, Vol 1. 1903, pp 176-177, puis dans les *Collected Papers of Teiji Takagi* (S. Iyanaga, Ed), Springer Verlag, New York 1990.



Teiji Takagi (1875-1960)

Nous définissons la fonction φ par

$$\varphi \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto d(x, \mathbf{Z}) := \inf \{|x - n| : n \in \mathbf{Z}\} \end{array} \right.$$

1. Démontrer que la fonction φ est 1-lipschitzienne.
2. Démontrer que la fonction φ est paire.
3. Démontrer que la fonction φ est 1-périodique.
4. Démontrer que $\varphi(x) = x$, pour tout $x \in [0, 1/2]$.
5. Tracer la représentation graphique de la fonction φ au-dessus de l'intervalle $[-4, 4]$.
6. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$

$$\varphi(x) = \begin{cases} x - E(x) & \text{si } x - E(x) \leq 1/2 \\ E(x) + 1 - x & \text{si } x - E(x) > 1/2 \end{cases}$$

7. Démontrer que la fonction φ est bornée sur \mathbf{R} et calculer $\|\varphi\|_\infty$.

Nous introduisons la fonction due à Teiji Takagi.

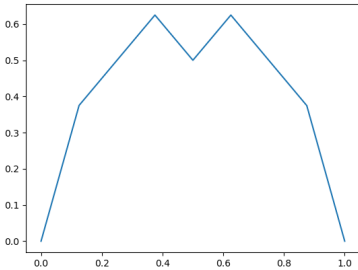
$$f \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varphi(2^k x)}{2^k} \end{array} \right.$$

8. Démontrer que cette fonction f est bien définie.

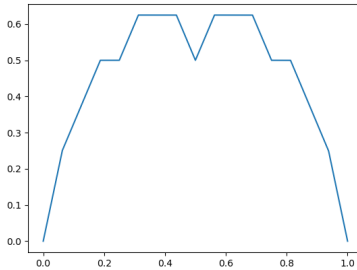
9. Démontrer que la fonction f est 1-périodique.

Ci-dessous, figurent des courbes de fonctions qui approximent la fonction f sur $[0, 1]$.

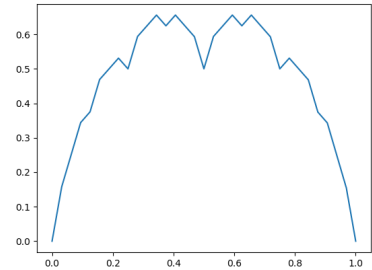
$$x \mapsto \sum_{k=0}^2 \frac{\varphi(2^k x)}{2^k}$$



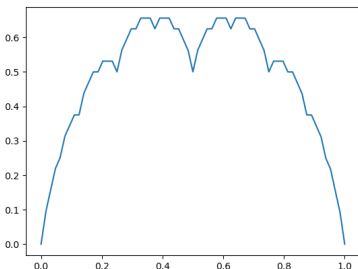
$$x \mapsto \sum_{k=0}^3 \frac{\varphi(2^k x)}{2^k}$$



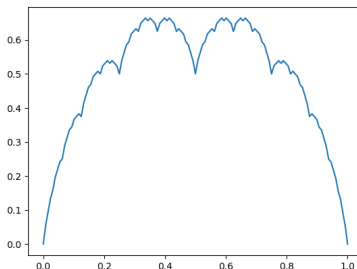
$$x \mapsto \sum_{k=0}^4 \frac{\varphi(2^k x)}{2^k}$$



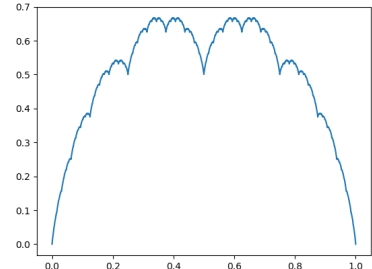
$$x \mapsto \sum_{k=0}^5 \frac{\varphi(2^k x)}{2^k}$$



$$x \mapsto \sum_{k=0}^6 \frac{\varphi(2^k x)}{2^k}$$



$$x \mapsto \sum_{k=0}^{100} \frac{\varphi(2^k x)}{2^k}$$



10. Démontrer que la fonction f est continue sur \mathbf{R} .

On souhaite démontrer que la fonction f n'est dérivable en aucun point de \mathbf{R} . Pour ce faire, on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe un nombre réel x en lequel la fonction f est dérivable.

11. Soient $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ deux suites de nombres réels telles que

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad a_n \leq x < b_n \quad ; \quad a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x \quad ; \quad b_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$$

Démontrer que $\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f'(x)$.

12. Soit $n \in \mathbf{N}$. Justifier qu'il existe un unique $j_n \in \mathbf{Z}$ tel que $a_n := \frac{j_n}{2^n} \leq x < \frac{j_n + 1}{2^n} =: b_n$, puis démontrer que les deux suites $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ convergent vers x .

13. Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $j \in \mathbf{N}$. Démontrer que $f\left(\frac{j}{2^n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \varphi\left(\frac{j}{2^{n-k}}\right)$.

14. Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Démontrer $\varepsilon_{n,k} := \frac{1}{2^k} \frac{\varphi(b_n 2^k) - \varphi(a_n 2^k)}{b_n - a_n} \in \{-1, 1\}$.

On pourra poser $q_{n,k} := \lfloor 2 a_n 2^k \rfloor$, démontrer que $2 b_n 2^k \in [q_{n,k}, q_{n,k} + 1]$, puis exploiter des propriétés de la fonction φ en distinguant deux cas suivant la parité de l'entier $q_{n,k}$.

15. Dédurre des deux questions précédentes que la suite $\left(\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ est divergente.

16. Conclure quant à la non dérivabilité de f en x .

On considère le \mathbf{R} -espace vectoriel $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

17. Soit $g \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$. Démontrer qu'il existe une suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ continues sur $[0, 1]$, dérivables en aucun point de $[0, 1]$, telle que

$$g_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_\infty} g$$

fonctionTakagiContinueNullePartDerivable [corrigé]

Indication(s) pour l'exercice 3

i) Convergence simple de la série de fonction $\sum f_n$ sur $[0, +\infty[$. Soit $x \in [0, +\infty[$ fixé.

- Cas où $x = 0 : \dots$
- Cas où $x > 0$. Comparer la série numérique $\sum \frac{x}{\ln(n)} (e^{-x})^n$ à une série convergente.

ii) Caractère \mathcal{C}^1 de la fonction $\sum_{n=2}^{+\infty} f_n$ sur $]0, +\infty[$. On applique le critère \mathcal{C}^1 pour les séries de fonctions, en remarquant, que pour tout $0 < a < b$, pour tout $(n, x) \in \mathbf{N}_{\geq 2} \times [a, b]$

$$|f'_n(x)| = \left| \frac{1-nx}{\ln(n)} e^{-nx} \right| \leq \frac{1+nb}{\ln(n)} (e^{-a}) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad [\text{croissances comparées}]$$

iii) La fonction $S = \sum_{n=2}^{+\infty} f_n$ n'est pas dérivable en 0 à droite. Pour tout $x > 0$

$$\tau(x) := \frac{S(x) - S(0)}{x} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\ln(n)}$$

Comme, pour tout $n \geq 2$, la fonction

$$x \mapsto \frac{e^{-nx}}{\ln(n)}$$

est décroissante sur $]0, +\infty[$, la fonction

$$\tau : x \mapsto \tau(x)$$

est décroissante sur $]0, +\infty[$. D'après le théorème de la limite monotone $\ell := \lim_{0^+} \tau$ existe dans $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$. On remarque que, pour un entier $N \geq 2$ fixé

$$\forall x > 0 \quad \tau(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\ln(n)} = \sum_{n=2}^N \frac{e^{-nx}}{\ln(n)} + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\ln(n)}}_{\geq 0} \geq \sum_{n=2}^N \frac{e^{-nx}}{\ln(n)}$$

En faisant tendre x vers 0^+ , il vient

$$\ell \geq \sum_{n=2}^N \frac{1}{\ln(n)}$$

Justifier que la série numérique de terme général $\frac{1}{\ln(n)} \geq 0$ diverge.

regulariteEquationFonctionnelleEquivalentSommeSerieFonctions [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 4

1. i) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, définissons la fonction f_n par

$$f_n \left| \begin{array}{l}]0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \frac{(-1)^n}{n+x} \end{array} \right.$$

- ii) Fixer $x \in]0, +\infty[$. Appliquer le critère des séries alternées pour établir la convergence de la série numérique $\sum f_n(x)$.
 iii) Soit $n \in \mathbf{N}$. La fonction f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad f'_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

Ainsi, la fonction $|f'_n|$ est décroissante sur $]0, +\infty[$. De plus, pour tout segment $[a, b]$ inclus dans $]0, +\infty[$

$$\|f'_n\|_{\infty, [a, b]} = \frac{1}{(n+a)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} > 0$$

Nous pouvons appliquer le critère \mathcal{C}^1 à la série de fonctions $\sum f_n$.

2. Soit $x \in]0, +\infty[$. D'après la question précédente

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

Comme la série numérique qui apparaît satisfait les hypothèses du critère spécial des séries alternées (à vérifier), nous savons que le signe de $S'(x)$ est le signe de

$$\frac{(-1)^{0+1}}{(0+x)^2} = -\frac{1}{x^2} < 0$$

3. Soit $x \in]0, +\infty[$. Le calcul de $S(x+1) + S(x)$ fait apparaître une somme télescopique.
 4. Soit $x \in]0, +\infty[$. D'après l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction S , il vient

$$x S(x) = 1 - x S(x+1)$$

et la fonction S est continue en 1.

5. Soit $x \in]1, +\infty[$. Par décroissance de la fonction S

$$\forall x \in]1, +\infty[\quad \frac{S(x) + S(x+1)}{2} \leq S(x) \leq \frac{S(x) + S(x-1)}{2}$$

On conclut avec l'équation fonctionnelle.

Indication(s) pour l'exercice 6

i) Un calcul formel, irrecevable sur une copie, mais précieux dans une approche heuristique, livre

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-nx} = e^{-x} \sum_{n=1}^{+\infty} n (e^{-x})^{n-1}$$

La série dérivée de la série géométrique apparaît, ce qui motive la suite.

ii) Démontrer que la série de fonctions de terme général

$$f_n : x \mapsto n x^{n-1}$$

converge simplement sur $[0, 1[$. Sa somme est notée

$$S \left\{ \begin{array}{l} [0, 1[\longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} \end{array} \right.$$

iii) Observer que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $e^{-x} \in [0, 1[$. Ainsi la série numérique $\sum n e^{-nx}$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-nx} = e^{-x} \sum_{n=1}^{+\infty} n (e^{-x})^{n-1} = e^{-x} S(e^{-x}) \quad [\text{le calcul formel i) est à présent licite, d'après ii)]$$

Expliciter la fonction S nous permettra donc de calculer la somme de la série convergence proposée à l'étude.

iv) Appliquer le critère de continuité pour les séries de fonctions pour obtenir la continuité de S sur $[0, 1[$.

v) Appliquer le théorème de primitivation pour les séries de fonctions pour en déduire que la fonction S est continue sur $[0, 1[$ et

$$\forall x \in [0, 1[\quad \int_0^x S(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

vi) Conclure avec le théorème fondamental de l'analyse.

Indication(s) pour l'exercice 7

1. i) Démontrer que

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \forall x \in [a, b] \quad |f_n(x)| \leq \frac{(x-a)^n}{n!} \|f_0\|_\infty$$

ii) En déduire que

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \|f_n\|_\infty \leq \frac{(b-a)^n}{n!} \|f_0\|_\infty$$

2. i) Appliquer le critère \mathcal{C}^1 à la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ pour en déduire que la fonction

$$S \left| \begin{array}{l} [a, b] \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \end{array} \right.$$

est dérivable sur $[a, b]$ et que

$$\forall x \in [a, b] \quad S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f_0(x) + S(x)$$

ii) La fonction S est donc solution du problème de Cauchy linéaire d'ordre 1

$$\begin{cases} y' = y + f_0(x) \\ y(a) = 0 \end{cases}$$

d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbf{R})$. Nous en déduisons que

$$\forall x \in [a, b] \quad \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) =: S(x) = e^x \int_a^x f_0(t) e^{-t} dt$$

puis

$$\forall x \in [a, b] \quad \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f_0(x) + e^x \int_a^x f_0(t) e^{-t} dt$$

Indication(s) pour l'exercice 9

1. Définissons, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n par

$$f_n \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}^- \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \prod_{k=0}^n \frac{1}{x+k} \end{array} \right.$$

Soit $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}^-$ fixé. On peut démontrer que la série numérique $\sum |f_n(x)|$ est convergente en appliquant la règle de d'Alembert.

2. i) Soit $n \in \mathbf{N}$. On décompose en éléments simples la fraction rationnelle $\prod_{k=0}^n \frac{1}{X+k} \in \mathbf{R}(X)$, dont tous les pôles sont simples (la tâche est ainsi aisée)

$$\prod_{k=0}^n \frac{1}{X+k} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} \frac{1}{X+k}$$

ii) Soit $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}^-$ fixé. Nous déduisons de ce qui précède que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} \frac{1}{x+k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \underbrace{\frac{(-1)^k}{k!(x+k)}}_{a_k} \underbrace{\frac{1}{(n-k)!}}_{b_{n-k}}$$

On vérifie que les séries numériques $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes. Par produit de Cauchy

$$f(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)} \right) \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \right)}_{=e}$$

3. i) Remarquons que $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}^-$ s'écrit comme une réunion d'intervalles ouverts

$$\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}^- =]0, +\infty[\cup \left(\bigcup_{m \in \mathbf{N}}]-m-1, -m[\right)$$

Nous démontrons que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur chacun des intervalles ouverts apparus dans la décomposition ci-dessus. Pour cela, nous appliquons le critère \mathcal{C}^k , où $k \in \mathbf{N}^*$, pour les séries de fonctions, sur chacun d'entre eux.

ii) Définissons, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction g_n par

$$g_n \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}^- \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \frac{(-1)^n}{n!(x+n)} \end{array} \right.$$

iii) Soit $n \in \mathbf{N}$. La fonction g_n est de classe \mathcal{C}^∞ sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}^-$. Au moyen d'un raisonnement par récurrence, on démontre

$$\forall k \in \mathbf{N} \quad \forall x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}^- \quad g_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{n+k} k!}{n!(x+n)^{k+1}}$$

iv) Soient $n \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{N}$ et $[a, b]$ un segment inclus dans $]0, +\infty[$. Comme la fonction

$$x \longmapsto \frac{1}{(x+n)^{k+1}}$$

est décroissante et positive sur $[a, b]$, nous obtenons

$$\left\| g_n^{(k)} \right\|_{\infty, [a, b]} = \left| g_n^{(k)}(a) \right|$$

On peut démontrer que la série numérique $\sum \left| g_n^{(k)}(a) \right|$ converge en appliquant la règle de d'Alembert.

v) Soient $n \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{N}$, $m \in \mathbf{N}$ et $[a, b]$ un segment inclus dans $] - m - 1, -m[$. Comme la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{(x+n)^{k+1}}$$

est monotone et de signe constant sur $[a, b]$ (à vérifier avec soin), nous obtenons

$$\left\| g_n^{(k)} \right\|_{\infty, [a, b]} = \max \left\{ \left| g_n^{(k)}(a) \right|, \left| g_n^{(k)}(b) \right| \right\} \leq \left| g_n^{(k)}(a) \right| + \left| g_n^{(k)}(b) \right|$$

On peut démontrer que les séries numériques $\sum \left| g_n^{(k)}(a) \right|$ et $\sum \left| g_n^{(k)}(b) \right|$ convergent en appliquant la règle de d'Alembert.

Indication(s) pour l'exercice 10

1. Soit $x \in]0, +\infty[$ fixé. On compare $f_n(x)$ à un terme général de série convergente de référence.
2. On applique le critère de continuité pour les séries de fonctions en remarquant que

$$\forall a > 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}^* \quad \|f_n\|_{\infty, [a, +\infty[} = f_n(a) \quad [f_n \text{ est décroissante et positive sur } [a, +\infty[]]$$

3. i) On applique le théorème de la double limite en $+\infty$, en remarquant que la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$ sur $[1, +\infty[$ a été établie à la question précédente. Il vient

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

- ii) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, soit g_n la fonction définie par

$$g_n \left| \begin{array}{l}]0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \frac{x}{n + n^2 x} \end{array} \right.$$

On applique le théorème de la double limite en $+\infty$ à la série de fonctions $\sum g_n$, en remarquant que, pour tout $(n, x) \in \mathbf{N}^* \times]0, +\infty[$

$$0 \leq g_n(x) = \frac{1}{n^2} \left(\frac{n + n^2 x - n}{n + n^2 x} \right) = \frac{1}{n^2} \left(1 - \frac{1}{1 + nx} \right) \leq \frac{1}{n^2}$$

On en déduit que

$$x f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{6}$$

4. i) Comme toutes les fonctions f_n sont décroissantes sur $]0, +\infty[$, la fonction f est décroissante sur $]0, +\infty[$. Elle admet donc une limite $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ en 0^+ (théorème de la limite monotone).
- ii) Soit $N \in \mathbf{N}^*$. Comme, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f_n(x) \geq 0$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \geq \sum_{n=1}^N f_n(x)$$

En faisant tendre x vers 0^+ dans cette inégalité, il vient

$$\ell \geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$$

On conclut en considérant la nature de la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$, dont tous les termes sont positifs.

- iii) Pour déterminer un équivalent de f au voisinage de 0^+ , on s'inspire de la démarche suivie pour démontrer que

$$\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$$

i.e. on effectue une comparaison série-intégrale, en fixant $x > 0$ et en rendant continu le paramètre discret n dans l'expression

$$f_n(x) = \frac{1}{n + n^2 x}$$

Fixons $x > 0$ et considérons la fonction

$$g \left| \begin{array}{l} [1, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R} \\ t \longmapsto \frac{1}{t + t^2 x} \end{array} \right.$$

qui est décroissante et positive. Ainsi, pour tout $n \geq 2$

$$\int_n^{n+1} g(t) dt \leq g(n) \leq \int_{n-1}^n g(t) dt$$

Nous en déduisons

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t+t^2x} dt \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x} = f(x) - \frac{1}{1+x} \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t+t^2x} dt$$

Comme, pour tout $t \geq 1$

$$g(t) = \frac{1}{t(1+tx)} = \frac{1}{t} - \frac{x}{xt+1}$$

la fonction

$$G \left| \begin{array}{l} [1, +\infty[\rightarrow \mathbf{R} \\ t \mapsto \ln(t) - \ln(xt+1) = \ln\left(\frac{t}{xt+1}\right) \end{array} \right.$$

est une primitive de g . Nous en déduisons

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) - \ln\left(\frac{2}{2x+1}\right) \leq f(x) - \frac{1}{1+x} \leq \ln\left(\frac{1}{x}\right) - \ln\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

equationFonctionnelleDeveloppementSerieFonctionsIndexeeZ [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 11

1. i) Définissons, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, les fonctions f_n^+ et f_n^- par

$$f_n^+ \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{(x+n)^2} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad f_n^- \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{(x-n)^2} \end{array} \right.$$

de sorte que, pour tout $N \in \mathbf{N}^*$

$$\sum_{n=-N}^N \frac{1}{(x+n)^2} = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^N f_n^+(x) + \sum_{n=1}^N f_n^-(x)$$

- ii) Soit $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ fixé. D'après le point précédent, pour démontrer que $f(x)$ est bien défini, il suffit de démontrer que les séries numériques $\sum f_n^+(x)$ et $\sum f_n^-(x)$ convergent. On peut l'établir en observant que

$$0 \leq f_n^+(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad 0 \leq f_n^-(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

Nous en déduisons que

$$(*) \quad f(x) = \frac{1}{x^2} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2}}_{=f_n^+(x)} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x-n)^2}}_{=f_n^-(x)}$$

- iii) Remarquons que

$$\mathbf{Z} = \{0\} \sqcup \mathbf{N}^* \sqcup \mathbf{Z}_{<0}$$

L'étude précédente et le théorème de sommation par paquets (cas positif) nous livrent que la famille $\left(\frac{1}{(x+n)^2}\right)_{n \in \mathbf{Z}}$ est sommable, de somme

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{(x+n)^2} = \frac{1}{x^2} + \sum_{n \in \mathbf{N}^*} \frac{1}{(x+n)^2} + \sum_{n \in \mathbf{N}^*} \frac{1}{(x-n)^2} = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x-n)^2} = f(x)$$

Ainsi le symbole $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}$ introduit dans l'énoncé peut être remplacé par $\sum_{n \in \mathbf{Z}}$.

- iv) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, si $x+1$ est un entier relatif alors x est un entier relatif. L'ensemble $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ est donc stable par l'application $x \mapsto x+1$.
v) Soit $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ et $N \in \mathbf{N}^*$. D'une part

$$\sum_{n=-N-1}^{N+1} \frac{1}{(x+n)^2} = \underbrace{\frac{1}{x-N-1} + \frac{1}{x+N+1}}_{\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0} + \underbrace{\sum_{n=-N}^N \frac{1}{(x+n)^2}}_{\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} f(x)} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} f(x)$$

et d'autre part

$$\sum_{n=-N-1}^{N+1} \frac{1}{(x+n)^2} = \sum_{n=-N-2}^N \frac{1}{(x+n+1)^2} = \underbrace{\frac{1}{x-N-1} + \frac{1}{x-N}}_{\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0} + \underbrace{\sum_{n=-N}^N \frac{1}{(x+n+1)^2}}_{\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} f(x+1)} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} f(x+1)$$

2. i) Comme la fonction f est 1-périodique sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z} = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}}]n, n+1[$, il suffit d'établir sa continuité sur $]0, 1[$, pour l'obtenir sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$.
ii) D'après (*), il suffit d'établir la continuité des fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^+$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^-$ sur $]0, 1[$. On cherche à appliquer le critère de continuité pour les séries de fonctions.

- iii) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, les fonctions f_n^+ et f_n^- sont continues sur $]0, 1[$.
- iv) Soit a, b des réels tels que $0 < a < b < 1$. Établir, avec toute la rigueur requise, que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$

$$\|f_n^+\|_{\infty, [a, b]} = f_n^+(a) = \frac{1}{(a+n)^2} \quad \text{et} \quad \|f_n^-\|_{\infty, [a, b]} = f_n^-(b) = \frac{1}{(b-n)^2}$$

pour établir que les suites de fonctions $\sum f_n^+$ et $\sum f_n^-$ convergent uniformément sur tout segment de $]0, 1[$.

- 3. Comme, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\sin(x) = 0$ si et seulement si $x \equiv 0 \pmod{\pi}$, la fonction g est définie sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$.
- 4. i) Justifier que la fonction g est continue et 1-périodique sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$.
- ii) Comme la fonction $h := g - f$ est continue sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ et 1-périodique, il suffit de démontrer qu'elle est prolongeable par continuité en 0 pour conclure qu'elle est prolongeable par continuité sur \mathbf{R} .
- iii) D'après (\star) , pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$

$$h(x) = \underbrace{\frac{1}{x^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}}_{=:k(x)} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2}}_{=:f_n^+(x)} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x-n)^2}}_{=:f_n^-(x)}$$

Il nous suffit donc d'établir que les fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^+$, $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^-$ et

$$k \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} \end{array} \right.$$

sont prolongeables par continuité en 0 pour obtenir le résultat demandé.

- iv) On applique le théorème de la double limite en un point du bord aux séries de fonctions $\sum f_n^+$ et $\sum f_n^-$, en remarquant que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$

- $f_n^+(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{n^2}$ et $\|f_n^+\|_{\infty, [-1/2, 0[\cup]0, 1/2]} = f_n^+(-1/2) = \frac{1}{(n-1/2)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$
- $f_n^-(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{n^2}$ et $\|f_n^-\|_{\infty, [-1/2, 0[\cup]0, 1/2]} = f_n^-(1/2) = \frac{1}{(n-1/2)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

On en déduit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^+(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^-(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{\pi^2}{6}$$

- v) Comme

$$\sin^2(\pi x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(\pi x - \frac{\pi^3 x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} \pi^2 x^2 - \frac{\pi^4 x^4}{3} + o(x^4)$$

il vient

$$k(x) = \frac{\sin^2(\pi x) - \pi^2 x^2}{x^2 \sin^2(\pi x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\frac{\pi^2}{3}$$

- vi) La fonction h est donc prolongeable par continuité sur \mathbf{R} en posant

$$\forall p \in \mathbf{Z} \quad h(p) = -\frac{\pi^2}{3} + \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{6} = 0$$

- 5. On note à présent h le prolongement par continuité de $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ à \mathbf{R} de la fonction h (cf. question précédente).

- i) Soit $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$. Nous remarquons qu'alors

$$\frac{x}{2} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z} \quad \text{et} \quad \frac{x+1}{2} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$$

- ii) Remarquons que

$$\mathbf{Z} = \{2n : n \in \mathbf{Z}\} \sqcup \{2n+1 : n \in \mathbf{Z}\}$$

Grâce au théorème de sommation par paquets (cas positifs)

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{(x/2+n)^2} + \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{(x/2+1/2+n)^2} = 4 \underbrace{\left(\sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{(x+2n)^2} + \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{(x+2n+1)^2} \right)}_{= \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{(x+n)^2}} = 4f(x) \end{aligned}$$

iii) D'après la relation de Pythagore et la formule de duplication pour sinus

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x/2)} + \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi(x+1)/2)} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x/2)} + \frac{\pi^2}{\cos^2(\pi x/2)} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x/2) \cos^2(\pi x/2)} = 4 \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x/2)}$$

iv) Des deux points précédents, nous déduisons que

$$\forall x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z} \quad h\left(\frac{x}{2}\right) + h\left(\frac{x+1}{2}\right) = 4h(x)$$

v) Comme la fonction h est continue sur \mathbf{R} , les fonctions

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto h\left(\frac{x}{2}\right) + h\left(\frac{x+1}{2}\right) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto 4h(x) \end{array} \right.$$

sont continues sur \mathbf{R} . Comme elles coïncident sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, partie dense de \mathbf{R} , elles coïncident sur \mathbf{R} tout entier.

6. Il s'agit de montrer que $h = 0$.

i) La fonction h est 1-périodique. Ainsi

$$\{h(x) : x \in \mathbf{R}\} = \{h(x) : x \in [0, 1]\}$$

D'après le théorème des bornes atteintes, la fonction h , continue sur le segment $[0, 1]$, est bornée sur $[0, 1]$, donc sur \mathbf{R} .

ii) Déduire de la question précédente que

$$4 \|h\|_{\infty, \mathbf{R}} \leq 2 \|h\|_{\infty, \mathbf{R}}$$

Indication(s) pour l'exercice 12

1. On définit, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n par

$$f_n \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \frac{\sin(2^n x)}{2^n} \end{array} \right.$$

et on applique le critère de continuité pour les séries de fonctions.

i) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n est continue sur \mathbf{R} .

ii) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\|f_n\|_{\infty, \mathbf{R}} = \frac{1}{2^n}$.

2. En construisant une suite de réels $(x_N)_{N \in \mathbf{N}}$ telle que $x_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ et

$$\frac{f(x_N) - f(0)}{x_N - 0} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty \quad [\text{explosions de pentes}]$$

nous contredirons la dérivabilité de la fonction f en 0.

i) Posons, pour tout $N \in \mathbf{N}$

$$x_N := \frac{\pi}{2^N}$$

ii) Soit $N \in \mathbf{N}^*$. Justifier

$$f(x_N) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\sin(2^n x_N)}{2^n}$$

iii) Observer que, pour tout $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, $2^n x_N \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et penser à l'inégalité de convexité

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \frac{2}{\pi} x \leq \sin(x) \leq x \quad [\text{cf. corde entre } (0, 0) \text{ et } (\pi/2, 1) \text{ et tangente en } (0, 0), \text{ pour la fonction } \sin]$$

pour démontrer que

$$f(x_N) \geq \frac{N}{2^{N-1}}$$

iv) En déduire que $\frac{f(x_N) - f(0)}{x_N - 0} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$.

Un corrigé de l'exercice 13

1. Soient x et y des nombres réels. Nous démontrons $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |x - y|$

i) Soit $n \in \mathbf{Z}$. Nous observons :

$$\varphi(x) \leq |x - n| \leq |x - y| + |y - n|$$

d'où :

$$\underbrace{\varphi(x) - |x - y|}_{\text{indépendant de } n} \leq |y - n| .$$

Par passage à l'inf sur $n \in \mathbf{Z}$, il vient :

$$\varphi(x) - |x - y| \leq \varphi(y)$$

puis :

$$(\star) \quad \varphi(x) - \varphi(y) \leq |x - y| .$$

ii) Par symétrie des rôles joués par x et y , nous déduisons de (\star) :

$$(\star\star) \quad \varphi(y) - \varphi(x) \leq |y - x| = |x - y| .$$

De (\star) et $(\star\star)$ on déduit : $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |x - y|$.

2. i) L'ensemble \mathbf{R} est symétrique par rapport à 0.

ii) L'application

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{Z} \\ n & \longmapsto & -n \end{array} \right.$$

est une permutation de l'ensemble \mathbf{Z} , d'où l'égalité d'ensembles :

$$E_x := \{|x - n| : n \in \mathbf{Z}\} = \left\{ \underbrace{|x - (-n)|}_{=|-x-n|} : n \in \mathbf{Z} \right\} =: E_{-x} .$$

A fortiori, $\varphi(x) := \inf E_x = \inf E_{-x} = \varphi(-x)$.

3. i) L'ensemble \mathbf{R} est stable par la fonction $x \mapsto x + 1$.

ii) L'application

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{Z} \\ n & \longmapsto & n + 1 \end{array} \right.$$

est une permutation de l'ensemble \mathbf{Z} , d'où l'égalité d'ensembles :

$$E_{x+1} := \{|x + 1 - n| : n \in \mathbf{Z}\} = \left\{ \underbrace{|x + 1 - (n + 1)|}_{=|x-n|} : n \in \mathbf{Z} \right\} =: E_x .$$

A fortiori, $\varphi(x + 1) := \inf E_{x+1} = \inf E_x = \varphi(x)$.

4. Soit $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

i) Nous calculons $|x - 0| = x$.

ii) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Comme $n \geq 1$:

$$-n \leq x - n \leq \frac{1}{2} - n \leq -\frac{1}{2}$$

et il vient $|x - n| \geq \frac{1}{2} \geq x = |x - 0|$.

iii) Soit $n \in \mathbf{Z}$ tel que $n \leq -1$. Comme $n \leq -1$:

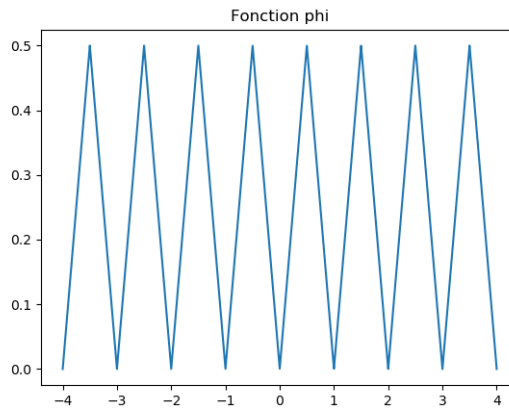
$$1 \leq -n \leq x - n \leq \frac{1}{2} - n$$

et il vient $|x - n| \geq 1 \geq x = |x - 0|$.

Des trois points précédents, nous déduisons :

$$\varphi(x) := \inf \{|x - n| : n \in \mathbf{Z}\} = |x - 0| = x .$$

5. Le graphe de la fonction φ au-dessus de l'intervalle $[-4, 4]$ est



6. Soit $x \in \mathbf{R}$. On rappelle que par définition de la partie entière, $E(x) \in \mathbf{Z}$ et $0 \leq x - E(x) < 1$.

i) 1^{er} cas : $0 \leq x - E(x) \leq \frac{1}{2}$. Nous calculons :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(x - E(x)) && [\varphi \text{ est 1-périodique}] \\ &= x - E(x) && \left[x - E(x) \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \right]. \end{aligned}$$

ii) 2^{ème} cas : $\frac{1}{2} < x - E(x)$. D'après la définition de la partie entière, nous avons de plus

$$\frac{1}{2} < x - E(x) < 1$$

d'où $-\frac{1}{2} < x - E(x) - 1 < 0$, puis :

$$0 < E(x) + 1 - x < \frac{1}{2}.$$

Nous calculons :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(x - E(x) - 1) && [\varphi \text{ est 1-périodique}] \\ &= \varphi(E(x) + 1 - x) && [\varphi \text{ est paire}] \\ &= E(x) + 1 - x && \left[E(x) + 1 - x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \right]. \end{aligned}$$

7. Nous remarquons :

$$\begin{aligned} \{|\varphi(x)| : x \in \mathbf{R}\} &= \left\{ |\varphi(x)| : x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \right\} && [\varphi \text{ est 1-périodique}] \\ &= \left\{ |\varphi(x)| : x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \right\} && [\varphi \text{ est paire}] \\ &= \left[0, \frac{1}{2}\right] && \left[\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \varphi(x) = x \right]. \end{aligned}$$

Nous en déduisons que :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad |\varphi(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

La fonction φ est bornée sur \mathbf{R} et :

$$\|\varphi\|_{\infty} := \sup \{|\varphi(x)| : x \in \mathbf{R}\} = \sup \left[0, \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}.$$

8. i) Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on définit la fonction f_k par

$$f_k \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \\ x \longmapsto \end{array} \right. \frac{\mathbf{R}}{\varphi(2^k x)}{2^k}$$

ii) Il s'agit ici de démontrer que la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} f_k$ converge simplement sur \mathbf{R} . Nous démontrons une propriété plus forte : la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} f_k$ converge normalement sur \mathbf{R} .

iii) Soit $k \in \mathbf{N}$. Comme la fonction φ est bornée sur \mathbf{R} , la fonction f_k est également bornée sur \mathbf{R} . De plus :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad |f_k(x)| = \left| \frac{\varphi(2^k x)}{2^k} \right| \leq \frac{\|\varphi\|_\infty}{2^k} = \underbrace{\frac{1}{2^{k+1}}}_{\text{indépendant de } x}.$$

Par passage au sup :

$$0 \leq \|f_k\|_\infty \leq \frac{1}{2^{k+1}}.$$

D'après le cours sur les séries géométriques et le théorème de domination pour les séries à termes positifs nuls, la série numérique $\sum_{k \geq 0} \|f_k\|_\infty$ converge.

9. i) L'ensemble \mathbf{R} est stable par la fonction $x \mapsto x + 1$.

ii) Soit $x \in \mathbf{R}$.

- Comme la fonction φ est 1-périodique, pour tout $k \in \mathbf{N}$:

$$f_k(x + 1) = \frac{\varphi(2^k(x + 1))}{2^k} = \frac{\varphi(2^k x + 2^k)}{2^k} = \frac{\varphi(2^k x)}{2^k} = f_k(x).$$

- Nous en déduisons que, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\sum_{k=0}^n f_k(x + 1) = \sum_{k=0}^n f_k(x).$$

- En faisant tendre n vers $+\infty$, il vient :

$$f(x + 1) := \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x + 1) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) =: f(x).$$

10. i) Comme la fonction φ est 1-lipschitzienne sur \mathbf{R} (Q1), elle est continue sur \mathbf{R} . Nous en déduisons que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, la fonction f_k est continue sur \mathbf{R} .

ii) Nous savons que la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} f_k$ converge normalement sur \mathbf{R} (Q8). Elle converge donc uniformément sur \mathbf{R} .

iii) Des deux points précédents, nous déduisons que la fonction f est continue sur \mathbf{R} .

11. i) Comme f est dérivable en x , la fonction

$$\varepsilon \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \\ h \longmapsto \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{ll} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) & \text{si } h \neq 0 \\ 0 & \text{si } h = 0 \end{array} \right. \mathbf{R}$$

est continue en 0 et vérifie :

$$\forall y \in \mathbf{R} \quad f(y) = f(x) + f'(x)(y - x) + (y - x)\varepsilon(y - x).$$

ii) On a donc :

$$f(b_n) = f(x) + f'(x)(b_n - x) + (b_n - x)\varepsilon(b_n - x) \quad \text{et} \quad f(a_n) = f(x) + f'(x)(a_n - x) + (a_n - x)\varepsilon(a_n - x).$$

Nous en déduisons

$$f(b_n) - f(a_n) = f'(x)(b_n - a_n) + (b_n - x)\varepsilon(b_n - x) - (a_n - x)\varepsilon(a_n - x).$$

puis :

$$\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(x) + \underbrace{\frac{b_n - x}{b_n - a_n} \varepsilon(b_n - x)}_{\beta_n} - \underbrace{\frac{a_n - x}{b_n - a_n} \varepsilon(a_n - x)}_{\alpha_n} .$$

Le résultat demandé est conséquence de $\alpha_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ et $\beta_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

iii) Soit $n \in \mathbf{N}$. Comme $a_n \leq x < b_n$:

$$0 \leq x - a_n < b_n - a_n$$

puis, comme $b_n - a_n > 0$:

$$0 \leq \frac{x - a_n}{b_n - a_n} < 1$$

d'où :

$$\left| \frac{a_n - x}{b_n - a_n} \right| \leq 1 .$$

Nous en déduisons :

$$0 \leq |\alpha_n| \leq \left| \frac{a_n - x}{b_n - a_n} \right| |\varepsilon(a_n - x)| \leq |\varepsilon(a_n - x)| .$$

Comme $a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$ et ε est continue en 0 :

$$|\varepsilon(a_n - x)| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} |\varepsilon(0)| = 0 .$$

Par théorème d'encadrement, $\alpha_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

iv) Soit $n \in \mathbf{N}$. Comme $a_n \leq x < b_n$:

$$a_n - b_n \leq x - b_n < 0$$

puis, comme $a_n - b_n < 0$:

$$1 \geq \frac{x - b_n}{a_n - b_n} > 0$$

d'où :

$$\left| \frac{b_n - x}{b_n - a_n} \right| \leq 1 .$$

Nous en déduisons :

$$0 \leq |\beta_n| \leq \left| \frac{b_n - x}{b_n - a_n} \right| |\varepsilon(b_n - x)| \leq |\varepsilon(b_n - x)| .$$

Comme $b_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$ et ε est continue en 0 :

$$|\varepsilon(b_n - x)| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} |\varepsilon(0)| = 0 .$$

Par théorème d'encadrement, $\beta_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

12. i) Soit $j \in \mathbf{Z}$. Nous observons :

$$\frac{j}{2^n} \leq x < \frac{j+1}{2^n} \iff j \leq 2^n x < j+1 .$$

D'après le cours sur la partie entière, il existe un unique entier relatif j satisfaisant cette dernière double inégalité, à savoir la partie entière de $2^n x$. Ainsi $j_n := E(2^n x)$ est l'unique entier recherché.

ii) Pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$0 \leq x - a_n < b_n - a_n = \frac{1}{2^n} .$$

Par théorème d'encadrement, $x - a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ et donc $a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$.

iii) Comme, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $b_n = a_n + \frac{1}{2^n}$, $b_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$.

13. i) Pour tout entier $k \geq n$, le nombre $2^k \frac{j}{2^n} = j 2^{k-n} \in \mathbf{Z}$. Comme φ est 1-périodique (Q3) :

$$\varphi\left(2^k \frac{j}{2^n}\right) = \varphi(0) = 0$$

d'après Q4 par exemple.

ii) Nous en déduisons :

$$f\left(\frac{j}{2^n}\right) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \varphi\left(2^k \frac{j}{2^n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \varphi\left(2^k \frac{j}{2^n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \varphi\left(\frac{j}{2^{n-k}}\right)$$

14. i) Effectuons la division euclidienne de l'entier j_n par l'entier 2^{n-k-1} . Il existe un unique couple d'entiers $(q_{n,k}, r_{n,k})$ tels que :

$$j_n = q_{n,k} 2^{n-k-1} + r_{n,k} \quad \text{et} \quad 0 \leq r_{n,k} \leq 2^{n-k-1} - 1.$$

nous en déduisons :

$$2 a_n 2^k = 2 \frac{j_n}{2^n} 2^k = j_n 2^{k+1-n} = q_{n,k} + r_{n,k} 2^{k+1-n} \quad \text{et} \quad 0 \leq r_{n,k} 2^{k+1-n} \leq 1 - 2^{k+1-n}$$

et en particulier $q_{n,k} = \lfloor 2 a_n 2^k \rfloor$. Nous avons de plus :

$$2 b_n 2^k = 2 \frac{j_n + 1}{2^n} 2^k = 2 \frac{j_n}{2^n} 2^k + 2^{k+1-n} = 2 a_n 2^k + 2^{k+1-n}$$

d'où :

$$q_{n,k} \leq 2 a_n 2^k \leq 2 b_n 2^k = 2 a_n 2^k + 2^{k+1-n} = q_{n,k} + r_{n,k} 2^{k+1-n} + 2^{k+1-n} \leq q_{n,k} + 1.$$

Nous déduisons de cette étude que :

$$2 a_n 2^k \text{ et } 2 b_n 2^k \text{ appartiennent à } [q_{n,k}, q_{n,k} + 1].$$

ii) Cas où l'entier $q_{n,k}$ est pair. Comme la fonction φ est 1-périodique :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^k} \frac{\varphi(b_n 2^k) - \varphi(a_n 2^k)}{b_n - a_n} &= \frac{\varphi(b_n 2^k) - \varphi(a_n 2^k)}{b_n 2^k - a_n 2^k} \\ &= \frac{\varphi\left(b_n 2^k - \frac{q_{n,k}}{2}\right) - \varphi\left(a_n 2^k - \frac{q_{n,k}}{2}\right)}{b_n 2^k - \frac{q_{n,k}}{2} - \left(a_n 2^k - \frac{q_{n,k}}{2}\right)}. \end{aligned}$$

D'après le premier point :

$$a_n 2^k - \frac{q_{n,k}}{2} \text{ et } b_n 2^k - \frac{q_{n,k}}{2} \text{ appartiennent à } \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Or sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, la fonction φ est affine, de pente 1 (Q4). Nous en déduisons :

$$\varepsilon_{n,k} := \frac{1}{2^k} \frac{\varphi(b_n 2^k) - \varphi(a_n 2^k)}{b_n - a_n} = \frac{\varphi\left(b_n 2^k - \frac{q_{n,k}}{2}\right) - \varphi\left(a_n 2^k - \frac{q_{n,k}}{2}\right)}{b_n 2^k - \frac{q_{n,k}}{2} - \left(a_n 2^k - \frac{q_{n,k}}{2}\right)} = 1.$$

iii) Cas où l'entier $q_{n,k}$ est impair. Comme la fonction φ est 1-périodique :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^k} \frac{\varphi(b_n 2^k) - \varphi(a_n 2^k)}{b_n - a_n} &= \frac{\varphi(b_n 2^k) - \varphi(a_n 2^k)}{b_n 2^k - a_n 2^k} \\ &= \frac{\varphi\left(b_n 2^k - \frac{q_{n,k} + 1}{2}\right) - \varphi\left(a_n 2^k - \frac{q_{n,k} + 1}{2}\right)}{b_n 2^k - \frac{q_{n,k} + 1}{2} - \left(a_n 2^k - \frac{q_{n,k} + 1}{2}\right)}. \end{aligned}$$

D'après le premier point :

$$a_n 2^k - \frac{q_{n,k} + 1}{2} \text{ et } b_n 2^k - \frac{q_{n,k} + 1}{2} \text{ appartiennent à } \left[-\frac{1}{2}, 0\right].$$

Or sur $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$, la fonction φ est affine, de pente -1 (Q2 et Q4). Nous en déduisons :

$$\varepsilon_{n,k} := \frac{1}{2^k} \frac{\varphi(b_n 2^k) - \varphi(a_n 2^k)}{b_n - a_n} = \frac{\varphi\left(b_n 2^k - \frac{q_{n,k} + 1}{2}\right) - \varphi\left(a_n 2^k - \frac{q_{n,k} + 1}{2}\right)}{b_n 2^k - \frac{q_{n,k} + 1}{2} - \left(a_n 2^k - \frac{q_{n,k} + 1}{2}\right)} = -1.$$

15. i) Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned}
 \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} &= \frac{1}{b_n - a_n} \left(f\left(\frac{j_n + 1}{2^n}\right) - f\left(\frac{j_n}{2^n}\right) \right) \\
 &= \frac{1}{b_n - a_n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \varphi\left(\frac{j_n + 1}{2^{n-k}}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \varphi\left(\frac{j_n}{2^{n-k}}\right) \right) \quad [\text{Question 13}] \\
 &= \frac{1}{b_n - a_n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \varphi(2^k b_n) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \varphi(2^k a_n) \right) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \frac{\varphi(b_n 2^k) - \varphi(a_n 2^k)}{b_n - a_n} \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_{n,k} \quad [\text{Question 14}]
 \end{aligned}$$

ii) Raisonnons par l'absurde et supposons que la suite $\left(\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ converge. D'après le premier point, il s'agit d'une suite d'entiers. Elle est donc stationnaire, i.e. il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N \quad \frac{f(b_{n+1}) - f(a_{n+1})}{b_{n+1} - a_{n+1}} - \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = 0.$$

En particulier :

$$\frac{f(b_{N+1}) - f(a_{N+1})}{b_{N+1} - a_{N+1}} - \frac{f(b_N) - f(a_N)}{b_N - a_N} = \sum_{k=0}^N \varepsilon_{N+1,k} + \sum_{k=0}^{N-1} -\varepsilon_{N,k} = 0.$$

Comme $N + 1 + N = 2N + 1$ est impair et qu'une somme d'un nombre impair de ± 1 ne peut être nulle, nous obtenons une contradiction. Ainsi, la suite $\left(\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ diverge-t-elle.

16. Nous avons supposé que la fonction f est dérivable en x .

- i) D'après les questions 11 et 12, la suite $\left(\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ converge.
- D'après la question 15, la suite $\left(\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ diverge.

Les deux points précédents sont contradictoires. La fonction f n'est donc pas dérivable en x .

On considère le \mathbf{R} -espace vectoriel $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

17. i) La fonction g est continue sur $[0, 1]$. D'après le théorème d'approximation polynomiale de Weierstraß il existe une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ de $[0, 1]$ dans \mathbf{R} telle que :

$$\|P_n - g\|_{\infty, [0, 1]} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

ii) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose :

$$g_n := P_n + \frac{1}{n} f|_{[0, 1]}.$$

iii) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. La fonction g_n est continue sur $[0, 1]$ (Q10).

iv) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Si la fonction g_n est dérivable en un réel $x \in]0, 1[$, alors la fonction

$$f|_{[0, 1]} = n g_n - n P_n$$

est également dérivable en x , ce qui n'est pas (Q16).

v) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. En adaptant les arguments qui ont permis d'établir que la fonction f n'est dérivable en aucun point de \mathbf{R} , on peut démontrer que f n'est dérivable à droite (respectivement à gauche) en aucun point de \mathbf{R} . On en déduit que la fonction g_n n'est pas dérivable à droite en 0, ni à gauche en 1.

vi) Des deux points précédents, nous déduisons que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la fonction g_n n'est dérivable en aucun point de $[0, 1]$.

vii) Enfin :

$$0 \leq \|g_n - g\|_{\infty, [0,1]} \leq \|P_n - g\|_{\infty, [0,1]} + \frac{1}{n} \|f|_{[0,1]}\|_{\infty, [0,1]} .$$

Par théorème d'encadrement, il vient :

$$\|g_n - g\|_{\infty, [0,1]} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 .$$