TD – Suites et séries de fonctions 1

Exercice de la banque CCINP n°8. —

1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.*
   (a) *Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente. On pourra considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.*
   (b) *Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.*
2. *On pose*
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$$
   (a) *Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$.*
   (b) *Étudier la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$.*

Exercice de la banque CCINP n°9. —

1. *Soit X un ensemble, (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$. Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g.*
2. *On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}\cos(\sqrt{n}x)$.*
   (a) *Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).*
   (b) *La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,+\infty[$?*
   (c) *Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,+\infty[$?*
   (d) *La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$?*

Exercice de la banque CCINP n°10 (tronqué). — *On pose $f_n(x) = \left(x^2+1\right)\dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.*

Exercice de la banque CCINP n°11. —

1. *Soit X une partie de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f. On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur X.*
2. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.*
   (a) *Étudier la convergence simple de la suite (f_n).*
   (b) *Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[a,+\infty[$ (avec $a > 0$), puis sur $]0,+\infty[$.*

Exercice de la banque CCINP n°12. —

1. *Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f, et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en x_0, avec $x_0 \in [a,b]$. Démontrer que f est continue en x_0.*
2. *On pose*
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad \forall\, x \in [0;1] \quad g_n(x) = x^n$$
   La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0;1]$?

Exercice de la banque CCINP n°14. —

1. *Soit a et b deux réels donnés avec $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles. Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, alors la suite $\left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_a^b f(x)\,dx$.*
2. *Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.*
3. *Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.*

Exercice de la banque CCINP n°15. —
Soit X une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X, puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X.*
2. *Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X.*
3. *La série de fonctions $\sum \frac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$?*

Exercice de la banque CCINP n°16 (tronqué). — *On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad \forall\, x \in [0,1] \quad u_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right]$.

1. *Démontrer que S est définie sur $[0,1]$.*
2. *On définit une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ par $u_n = \ln(n+1) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. En utilisant $S(1)$ démontrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente. En déduire un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.*

Exercice de la banque CCINP n°17. — *Soit $A \subset \mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.*

1. *Démontrer l'implication*

$$\Big(\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } A\Big)$$
$$\Downarrow$$
$$(\text{la suite de fonctions } (f_n) \text{ converge uniformément vers 0 sur } A)$$

2. *On pose*

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, x \in [0;+\infty[\quad f_n(x) = nx^2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$$

Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0;+\infty[$. $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0;+\infty[$? Justifier.

Exercice de la banque CCINP n°53 (tronqué). — *On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^4x^4}$.*

1. *Prouver que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On pose alors*

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

2. *Soit* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $0 < a < b$. $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} f_n$ *converge-t-elle normalement sur* $[a,b]$? *sur* $[a,+\infty[$?

3. $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} f_n$ *converge-t-elle normalement sur* $[0,+\infty[$?

Exercice 1 ★☆☆ — *Dans chacun des cas suivants, étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *sur* $[0,1]$.

(1) $f_n \colon x \longmapsto x^n\,(1-x)$

(2) $f_n \colon x \longmapsto n^\alpha\, x\,(1-x)^n$ *où* $\alpha \in \mathbf{R}$

(3) $f_n \colon x \longmapsto \begin{cases} x^n\,\ln(x) & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(4) $f_n \colon x \longmapsto n^2\, e^{-nx}$

`modeConvergenceSuitesFonctions1`

Exercice 2 ★★☆ — *Pour tout* $n \in \mathbf{N}$, *posons*

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \arctan\left(\dfrac{n+x}{1+nx}\right) \end{array} \right.$$

Étudier la convergence simple et uniforme sur $[0,+\infty[$ *de la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

`modeConvergenceSuitesFonctions2`

Exercice 3 ★☆☆ — *Soient* X *un ensemble non vide et* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}(X,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ *une suite de fonctions.*

1. *Démontrer*

$$\sum f_n \text{ converge uniformément sur } X \implies f_n \xrightarrow[X]{\text{CU}} 0_{\mathbf{K}^X}$$

La contraposée de cette implication permet de démontrer la non-convergence d'une série de fonctions.

2. *Démontrer, au moyen d'une contre-exemple, que la réciproque de l'implication de la question 1 est fausse.*

`conditionNecessaireConvergenceUniformeSerieFonctions`

Exercice 4 ★☆☆ — *Pour tout* $n \in \mathbf{N}$, *on considère les fonctions* $f_n \colon x \longmapsto n\, e^{-n^2x^2}$.

1. *Déterminer le domaine de définition de la fonction*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \,:\, x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

2. *Démontrer que, pour tout* $a > 0$, *la série de fonctions* $\sum f_n$ *converge uniformément sur les intervalles* $]-\infty,-a]$ *et* $[a,+\infty[$.
3. *La série de fonctions* $\sum f_n$ *converge-t-elle uniformément sur* $]0,+\infty[$?

`modeConvergenceSeriesFonctions1`

Exercice 5 ★☆☆ — *Posons, pour tout* $n \in \mathbf{N}$

$$f_n \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{(-1)^n}{nx+1} \end{array} \right.$$

1. *Démontrer que la série de fonctions* $\sum f_n$ *converge simplement sur* $]0,+\infty[$.
2. *La série de fonctions* $\sum f_n$ *converge-t-elle normalement sur un segment d'intérieur non vide de* $]0,+\infty[$ *?*
3. *Démontrer que la série* $\sum f_n$ *converge uniformément sur tout intervalle de la forme* $[a,+\infty[$, *avec* $a>0$.
4. *Soit la fonction*
$$S \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nx+1} \end{array} \right.$$
Écrire S *comme somme d'une série convergeant normalement sur tout intervalle de la forme* $[a,+\infty[$, *avec* $a>0$.

`modeConvergenceSeriesFonctions2`

Exercice 6 ★☆☆ — *Soit la fonction*
$$f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$$

1. *Déterminer l'ensemble solution de la fonction* f.
2. *Donner un équivalent de* $f(x)$ *quand* x *tend vers* 1, *sachant que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

`equivalentSommeSerieFonctionsComparaisonSerieIntegrale`

Exercice 7 ★☆☆ — *Soient* I *un intervalle de* $\mathbf{R}$ *d'intérieur non vide et une suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbf{R})^{\mathbf{N}}$ *convergeant simplement vers une fonction* $f \in \mathcal{F}(I,\mathbf{R})$.

1. *On suppose que l'intervalle* I *est symétrique par rapport à 0 et que, pour tout* $n \in \mathbf{N}$, *la fonction* f_n *est paire. Démontrer que la fonction* f *est paire.*
2. *On suppose que, pour tout* $n \in \mathbf{N}$, *la fonction* f_n *est croissante sur* I. *Démontrer que la fonction* f *est croissante sur* I.
3. *On suppose que toutes les fonctions* f_n *sont bornées sur* I. *Démontrer, au moyen d'un contre-exemple, que la fonction* f *n'est pas nécessairement bornée sur* I.
4. *On suppose que toutes les fonctions* f_n *sont continues sur* I. *Démontrer, au moyen d'un contre-exemple, que la fonction* f *n'est pas nécessairement continue sur* I.
5. *Soit* $k \in \mathbf{R}$. *On suppose que, pour tout* $n \in \mathbf{N}$, *la fonction* f_n *est* k*-lipschitzienne sur* I. *Démontrer que la fonction* f *est* k*-lipschitzienne sur* I.
6. *On suppose que, pour tout* $n \in \mathbf{N}$, *la fonction* f_n *est lipschitzienne sur* I. *Démontrer, au moyen d'un contre-exemple, que la fonction* f *n'est pas nécessairement lipschitzienne sur* I.

`proprietesPreserveesConvergenceSimple`

Exercice 8 ★☆☆ — *Soit* I *un intervalle de* $\mathbf{R}$. *Notons* $\mathcal{B}(I,\mathbf{C})$ *l'espace vectoriel des fonctions bornées de* I *dans* $\mathbf{C}$. *Pour tout* $f \in \mathcal{B}(I,\mathbf{C})$, *posons*
$$||f||_\infty := \sup_{x\in I} |f(x)|.$$

1. *Démontrer que* $||\cdot||_\infty$ *est une norme sur* E.
2. *Soit* $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite de fonctions de* I *dans* $\mathbf{C}$ *convergeant uniformément sur* I *vers une fonction* g. *On suppose que pour tout* $n \in \mathbf{N}$, *la fonction* g_n *est bornée. Démontrer que la fonction* g *est bornée.*

`limiteUniformeSuitesFonctionsBornees`

Exercice 9 ★★☆ — *Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, $a \in I$, $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{C}^0(I,\mathbf{R})^{\mathbf{N}}$ et $f \in \mathcal{F}(I,\mathbf{R})$ tels que*

$$f_n \xrightarrow[I]{\text{CU}} f$$

En remarquant que

$$\forall\,(N,x) \in \mathbf{N}\times I \quad |f(x)-f(a)| \leqslant |f(x)-f_N(x)| + |f_N(x)-f_N(a)| + |f_N(a)-f(a)|$$

démontrer que la fonction f est continue en a.

> *Nous avons ainsi démontré qu'une limite uniforme de fonctions continues sur un intervalle est continue sur un intervalle. Ce résultat figurera dans la chapitre « Suites et séries de fonctions 2 ».*

`continuitePreserveeContinuiteUniforme`

Exercice 10 ★☆☆ — *Soient a, b des réels tels que $a < b$, $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})^{\mathbf{N}}$ et $f \in \mathcal{F}([a,b],\mathbf{R})$ tels que*

$$f_n \xrightarrow[{[a,b]}]{\text{CU}} f$$

D'après l'exercice 9, la fonction f est continue sur $[a,b]$. Démontrer que

$$\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

> *Nous avons ainsi démontré que, pour toute suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ continues sur un segment $[a,b]$, qui converge uniformément sur $[a,b]$*
>
> $$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\ \mathrm{d}t$$
>
> *Ce résultat figurera dans la chapitre « Suites et séries de fonctions 2 ».*

`echangeLimiteIntegraleConvergenceUniformeSegment`

Exercice 11 ★★☆ — *Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs réelles. On suppose que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$, vers une fonction f. D'après l'exercice 9, la fonction f est continue sur $[a,b]$. Démontrer que*

$$\sup_{x\in[a,b]} f_n(x) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

après avoir justifié l'existence des nombres en jeu.

`echangeLimiteBorneSuperieureConvergenceUniformeSegment`

Exercice 12 ★★☆ — *Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs réelles. On suppose qu'il existe une fonction continue $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que la suite de fonctions $\left((f_n)_{\,|\,[a,b[}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers $f_{\,|\,[a,b[}$. D'après l'exercice 3, la fonction f est continue sur l'intervalle $[a,b[$.*

1. *Démontrer que $f_n(b) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} f(b)$.*
2. *En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$.*

`theoremeDoubleLimiteBordVersionFaible`

Exercice 13 ★★☆ — *Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles, convergeant simplement sur $[a,b]$ vers la fonction nulle. On suppose que, pour tout $x \in [a,b]$, la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.*

1. *Justifier que*

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \quad \exists\, x_n \in [a,b] \quad f_n(x_n) = \sup_{x\in[a,b]} f_n(x)$$

2. *Démontrer que la suite numérique $(f_n(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge. Nous notons ℓ sa limite.*

3. *Justifier que la suite numérique* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *possède une valeur d'adhérence* x.
4. *Démontrer que*
$$\forall\, n \in \mathbf{N} \quad 0 \leqslant \ell \leqslant f_n(x)$$
5. *Démontrer que la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge uniformément vers la fonction nulle sur* $[a,b]$.
6. *Soit* $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite de fonctions de* $[a,b]$ *dans* $\mathbf{R}$. *On suppose que*
   (H1) *la suite de fonctions* $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge simplement vers une fonction* g *sur* $[a,b]$ *;*
   (H2) *pour tout* $n\in\mathbf{N}$, *la fonction* g_n *est continue sur* $[a,b]$ *;*
   (H3) *la fonction* g *est continue sur* $[a,b]$ *;*
   (H4) *pour tout* $x\in[a,b]$, *la suite numérique* $(g_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ *est décroissante.*

   Démontrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge uniformément vers* g. *Il s'agit d'un théorème dû à Dini.*

`premierTheoremeDini`

Exercice 14 ★★☆ — *Soit* $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbf{R})$. *Pour tout* $n\in\mathbf{N}$, *nous définissons le polynôme*
$$B_n(f) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) X^k\,(1-X)^{n-k} \qquad \textit{[polynôme de Bernstein]}$$
que nous confondons avec la fonction polynomiale associée sur $[0,1]$. *On se propose de démontrer que*
$$B_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f \qquad \textit{[théorème d'approximation polynomiale de Weierstraß]}$$

1. *Soient les fonctions*
$$f_0 \left|\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array}\right. \qquad f_1 \left|\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}\right. \qquad f_2 \left|\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}\right.$$
   Démontrer que, pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, $B_n(f_0)=1$, $B_n(f_1)=X$ *et* $B_n(f_2) = X^2 + \dfrac{X(1-X)}{n}$.
2. *On fixe un réel* $\varepsilon > 0$.
   (a) *Vérifier que*
$$\forall\,(n,x)\in\mathbf{N}^*\times[0,1] \quad f(x) - B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^k\,(1-x)^{n-k}\left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$
   (b) *Justifier*
$$\exists\,\eta>0 \quad \forall\,x\in[0,1] \quad \forall\,n\in\mathbf{N}^* \quad \forall\,k\in[\![0,n]\!] \quad \left|x-\frac{k}{n}\right| \leqslant \eta \implies \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \varepsilon$$
   (c) *Soit* $(n,x)\in\mathbf{N}^*\times[0,1]$. *On pose*
$$I(n,x) := \left\{k\in[\![0,n]\!] \;:\; \left|x-\frac{k}{n}\right|\leqslant\eta\right\} \qquad \text{et} \qquad J(n,x) := \left\{k\in[\![0,n]\!] \;:\; \left|x-\frac{k}{n}\right|>\eta\right\}$$
   Démontrer
$$\left|\sum_{k\in I(n,x)}\binom{n}{k} x^k\,(1-x)^{n-k}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right| \leqslant \varepsilon$$
   puis
$$\left|\sum_{k\in J(n,x)}\binom{n}{k} x^k\,(1-x)^{n-k}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right| \leqslant \frac{2\,||\,f\,||_\infty}{\eta^2}\sum_{k\in J(n,x)}\binom{n}{k} x^k\,(1-x)^{n-k}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2$$
   (d) *En déduire que*
$$\exists\,N_\varepsilon\in\mathbf{N}^* \quad \forall\,n\geqslant N_\varepsilon \quad ||\,B_n(f)-f\,||_\infty \leqslant 2\,\varepsilon$$

`demonstrationTheoremeWeierstrassPolynomesBernstein`

Exercice 15 ★★★ — *Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions définies sur $[a,b]$, à valeurs réelles. On suppose que*

(H1) *la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement sur $[a,b]$ vers une fonction f ;*

(H2) *la fonction f est continue sur $[a,b]$;*

(H3) *pour tout $n\in\mathbf{N}$, la fonction f_n est croissante sur $[a,b]$.*

Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f. Il s'agit d'un théorème dû à Dini.

`deuxiemeTheoremeDini` [corrigé]

Exercice 16 ★★★ — *Soit $f\in\mathcal{C}^0([0,1],\mathbf{R})$. Pour tout $n\in\mathbf{N}$, notons*

$$g_n \;\middle|\; \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^n\, f(x) \end{array}$$

Démontrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ si et seulement si $f(1)=0$.

`cnsConvergenceUniformeSuiteArcsModifiee` [corrigé]

Exercice 17 ★★★ — *Posons*

$$f \;\middle|\; \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 2\,x\,(1-x) \end{array}$$

Pour tout $n\in\mathbf{N}$, on note f^n la puissance n-ième de f pour le produit de composition.

1. *Démontrer que la suite de fonctions $(f^n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction*

$$g \;\middle|\; \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x\in\{0,1\} \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } 0<x<1 \end{cases} \end{array}$$

2. *Démontrer que la suite de fonctions $(f^n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers la fonction constante $\dfrac{1}{2}$ uniformément sur tout segment de $]0,1[$.*
3. *Soient a,b tels que $0<a<b<1$. Démontrer que l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients entiers est dense dans $\mathcal{C}^0([a,b])$.*

`densiteFonctionsPolynomialesCoefficientsEntiersX` [corrigé]

`deuxiemeTheoremeDini` [énoncé]

Un corrigé de l'exercice 15

Fixons $\varepsilon > 0$.

- La fonction f étant continue sur le segment $[a, b]$, elle est uniformément continue (théorème de Heine). Il existe donc un réel $\eta > 0$ tel que
$$\forall\,(x, y) \in [a, b]^2 \quad |x - y| \leqslant \eta \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$
Introduisons un entier naturel non nul N tel que $\dfrac{b-a}{N} \leqslant \eta$, ($\mathbf{R}$ est un corps archimédien) et considérons la subdivision du segment $[a, b]$ définie par
$$a_0 = a \ < \ a_1 = a + \frac{(b-a)}{N} \ < \ \ldots \ < \ a_k = a + k\,\frac{(b-a)}{N} \ < \ \ldots \ < \ a_N = a + N\,\frac{(b-a)}{N} = b$$
- D'après la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vers la fonction f sur $[a, b]$
$$\forall\,k \in [\![0, N]\!] \quad \exists\,N_k \in \mathbf{N} \quad \forall\,n \geqslant N_k \quad |f_n(a_k) - f(a_k)| \leqslant \varepsilon$$
Posons $N := \max\{N_k \ : \ k \in [\![0, N]\!]\}$ et fixons un entier $n \geqslant N$.
- Soient $x \in [a, b]$ et $k \in [\![0, N-1]\!]$ tel que $x \in [a_k, a_{k+1}]$. La fonction f est croissante sur $[a, b]$ (limite simple d'une suite de fonctions croissantes), tout comme la fonction f_n. Ainsi
$$f(a_k) - f_n(a_{k+1}) \leqslant f(x) - f_n(x) \leqslant f(a_{k+1}) - f_n(a_k)$$
qui s'écrit encore
$$\underbrace{f(a_k) - f(a_{k+1})}_{\geqslant -\varepsilon} + \underbrace{f(a_{k+1}) - f_n(a_{k+1})}_{\geqslant -\varepsilon} \leqslant f(x) - f_n(x) \leqslant \underbrace{f(a_{k+1}) - f(a_k)}_{\leqslant \varepsilon} + \underbrace{f(a_k) - f_n(a_k)}_{\leqslant \varepsilon}$$
d'où $|f_n(x) - f(x)| \leqslant 2\,\varepsilon$.

cnsConvergenceUniformeSuiteArcsModifiee [énoncé]

Un corrigé de l'exercice 16

La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers la fonction

$$g \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ f(1) & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers g sur le segment $[0,1]$. Alors

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^* \quad 0 \leqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \left|f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right| = \left|g_n\left(1-\frac{1}{n}\right) - g\left(1-\frac{1}{n}\right)\right| \leqslant ||\, g_n - g\,||_{\infty,[0,1]}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, il vient

$$0 \leqslant \frac{|f(1)|}{e} \leqslant 0$$

Remarque. Si l'on sait qu'une limite uniforme d'une suite de fonctions continues sur $[0,1]$ est continue sur $[0,1]$, l'assertion à établir est claire. En effet, la continuité de la fonction g sur $[0,1]$ livre $f(1)=0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $f(1)=0$ et fixons $\varepsilon > 0$.

- Par continuité de f en 1

$$\exists\, \alpha \in]0,1[\quad \forall\, x \in]\alpha,1] \quad |f(x)| \leqslant \varepsilon$$

  Nous en déduisons que

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \quad \forall\, x \in]\alpha,1] \quad |g_n(x)-g(x)| = |g_n(x)| = x^n\ |f(x)| \leqslant \varepsilon$$

- La suite $(\alpha^n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant vers 0

$$\exists\, N \in \mathbf{N} \quad \forall\, n \geqslant N \quad \alpha^n \leqslant \varepsilon$$

  Nous en déduisons que

$$\forall\, n \geqslant N \quad \forall\, x \in [0,\alpha] \quad |g_n(x)-g(x)| = |g_n(x)| = x^n\ |f(x)| \leqslant \alpha^n\ ||\, f\,||_{\infty,[0,1]} \leqslant \varepsilon\ ||\, f\,||_{\infty,[0,1]}$$

- Des deux points précédents, nous déduisons que

$$\forall\, n \geqslant N \quad \forall\, x \in [0,1] \quad |g_n(x)-g(x)| \leqslant \varepsilon + \varepsilon\ ||\, f\,||_{\infty,[0,1]}$$

densiteFonctionsPolynomialesCoefficientsEntiersX [énoncé]

Un corrigé de l'exercice 17

1. Pour tout $x \in [0,1]$, la suite numérique $(f^n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite récurrente. Nous savons donc comment procéder pour l'étudier.

   (a) Pour tout $x \in [0,1]$
   $$0 \leqslant 2\,x\,(1-x) = \frac{1}{2} - 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}$$
   donc $f([0,1]) \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et le segment $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ est stable par f. Donc
   $$\forall\, x \in [0,1] \quad \forall\, n \in \mathbf{N}^* \quad f^n(x) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

   (b) La fonction f est croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et
   $$\forall\, x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad f(x) - x = 2\,x\left(\frac{1}{2} - x\right) \geqslant 0$$
   Nous en déduisons que
   $$\forall\, x \in [0,1] \quad \forall\, n \in \mathbf{N}^* \quad f^n(x) \leqslant f^{n+1}(x)$$

   Fixons un réel $x \in [0,1]$. D'après (a) et (b), la suite numérique $(f^n(x))_{n\in\mathbf{N}^*}$ est croissante, a tous ses termes dans $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, donc est majorée. D'après le théorème de la limite monotone, la suite numérique $(f^n(x))_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge et
   $$0 \leqslant \lim_{n\to+\infty} f^n(x) = \sup_{n\in\mathbf{N}^*} f^n(x) \leqslant \frac{1}{2}$$
   Comme de plus

   (c) la fonction f est continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

   (d) la fonction f possède deux points fixes 0 et $\frac{1}{2}$ pour seuls points fixes sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

   la suite numérique $(f^n(x))_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers 0 ou $\frac{1}{2}$. Scindons alors l'étude en deux parties.

   - Cas où $x \in \{0,1\}$. Tous les termes de la suite numérique $(f^n(x))_{n\in\mathbf{N}^*}$ sont nuls. Elle converge donc vers 0.
   - Cas où $x \in]0,1[$. D'après le théorème de la limite monotone
   $$0 < f^1(x) \leqslant \sup_{n\in\mathbf{N}^*} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$
   La suite numérique $(f^n(x))_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge donc vers $\frac{1}{2}$.

2. (a) La symétrie de la courbe représentative de la fonction
   $$f \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 2\,x\,(1-x) = \frac{1}{2} - 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \end{array}\right.$$
   par rapport à la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ nous invite à considérer des segments inclus dans $]0,1[$ centrés en $\frac{1}{2}$.

   (b) Soient $r \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ et $x \in \left[\frac{1}{2} - r, \frac{1}{2} + r\right] = B_f\left(\frac{1}{2}, r\right)$. Comme $\left|x - \frac{1}{2}\right| \leqslant r$
   $$f\left(\frac{1}{2} - r\right) \leqslant \frac{1}{2} - 2\,r^2 \leqslant \frac{1}{2} - 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = f(x) \leqslant \frac{1}{2}$$

La fonction f étant croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, il vient

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^* \quad f^n\left(\frac{1}{2} - r\right) \leqslant f^n(x) \leqslant \frac{1}{2}$$

puis

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^* \quad 0 \leqslant \frac{1}{2} - f^n(x) \leqslant \frac{1}{2} - f^n\left(\frac{1}{2} - r\right)$$

et la dernière inégalité est une égalité pour $x = \frac{1}{2} - r$. Ainsi

$$||\, f^n - g\,||_{\infty, \left[\frac{1}{2}-r, \frac{1}{2}+r\right]} = \frac{1}{2} - f^n\left(\frac{1}{2} - r\right)$$

Comme $\frac{1}{2} - r \in]0, 1[$, nous déduisons de la question 1 que

$$||\, f^n - g\,||_{\infty, \left[\frac{1}{2}-r, \frac{1}{2}+r\right]} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

(c) Soient a, b des réels tels que $0 < a < b < 1$. Alors

$$r := \min\{1 - b, a\} \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\qquad \text{et} \qquad [a, b] \subset [r, 1 - r] = B_f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - r\right)$$

De (b), nous déduisons que la suite de fonctions $(f^n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge uniformément sur $[a, b]$.

3. Pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, on pose

$$\widetilde{P} \left| \begin{array}{ccc} [a, b] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} [P]_n\, x^n \end{array} \right.$$

Notons

$$\mathcal{P}([a, b]) = \left\{\widetilde{P} \ :\ P \in \mathbf{R}[X]\right\} \qquad , \qquad \mathcal{P}_{\mathbf{Z}}([a, b]) = \left\{\widetilde{P} \ :\ P \in \mathbf{Z}[X]\right\}$$

et $\overline{\mathcal{P}([a, b])}$, $\overline{\mathcal{P}_{\mathbf{Z}}([a, b])}$ leurs adhérences respectives dans $\left(\mathcal{C}^0([a, b]), ||\cdot||_\infty\right)$.

(a) D'après le théorème de Weierstraß, $\overline{\mathcal{P}([a, b])} = \mathcal{C}^0([a, b])$. Il suffit donc de démontrer que

$$\mathcal{P}([a, b]) \subset \overline{\mathcal{P}_{\mathbf{Z}}([a, b])}$$

pour en déduire $\overline{\mathcal{P}_{\mathbf{Z}}([a, b])} = \mathcal{C}^0([a, b])$.

(b) L'ensemble $\mathcal{P}_{\mathbf{Z}}([a, b])$ est un anneau, stable pour le produit de composition. Ainsi

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \quad f^n_{|[a,b]} \in \mathcal{P}_{\mathbf{Z}}([a, b])$$

D'après la question 2, la fonction constante sur $[a, b]$, égale à $\frac{1}{2}$, appartient à $\overline{\mathcal{P}_{\mathbf{Z}}([a, b])}$.

(c) Introduisons l'ensemble des nombres dyadiques

$$\mathcal{D}_2 := \left\{\frac{p}{2^p} \ :\ (p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}\right\}$$

et l'ensemble des fonctions constantes dyadiques sur $[a, b]$

$$\mathcal{D}_2([a, b]) := \left\{\varphi \in \mathbf{R}^{[a,b]} \ :\ \exists\, d \in \mathcal{D}_2 \quad \forall\, x \in [a, b] \quad \varphi(x) = d\right\}$$

Soit $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$. La fonction

$$h \left| \begin{array}{ccc} [a, b] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & p\, x^q \end{array} \right.$$

appartient à $\mathcal{P}_{\mathbf{Z}}([a, b])$. Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a, b]$, donc $||\, h'\,||_\infty$-lipschitzienne sur $[a, b]$ (inégalité des accroissements finis). Nous en déduisons que

$$\forall\, x \in [a, b] \quad \left|h\left(f^n(x)\right) - \frac{p}{2^q}\right| \leqslant ||\, h'\,||_\infty \left|f^n(x) - \frac{1}{2}\right| \leqslant \underbrace{||\, h'\,||_\infty\, ||\, f^n - g\,||_\infty}_{\text{indépendant de } x}$$

Par passage à la borne supérieure sur $x \in [a,b]$, il vient

$$\left|\left| h \circ f^n_{|[a,b]} - h \circ g_{|[a,b]} \right|\right|_\infty \leqslant || h' ||_\infty \left|\left| f^n_{|[a,b]} - g_{|[a,b]} \right|\right|_\infty$$

De la question 2, nous déduisons que la suite $\left(h \circ f^n_{|[a,b]}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathcal{P}_{\mathbf{Z}}([a,b])$ converge uniformément vers la fonction constante dyadique

$$h \circ g_{|[a,b]} \left| \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{p}{2^q} \end{array} \right.$$

sur $[a,b]$. Ceci étant établi pour $(p,q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ quelconque, nous en déduisons que toute fonction constante dyadique sur $[a,b]$ est limite uniforme d'une suite d'éléments de $\mathcal{P}_{\mathbf{Z}}([a,b])$ sur $[a,b]$.

(d) Nous démontrons que l'ensemble $\mathcal{D}_2$ des nombres dyadiques est dense dans $\mathbf{R}$. Soit α et β des réels tels que $\alpha < \beta$. Comme la suite numérique $\left(\dfrac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0

$$\exists\, q \in \mathbf{N} \quad \frac{1}{2^q} < \beta - \alpha$$

Posons $p := \lfloor 2^q\, \alpha \rfloor \in \mathbf{Z}$. Alors

$$\alpha < \frac{p}{2^q} + \frac{1}{2^q} \leqslant \alpha + \frac{1}{2^q} < \alpha + \beta - \alpha = \beta$$

Le nombre dyadique $\dfrac{p+1}{2^q}$ appartient donc à l'intervalle $]\alpha, \beta[$.

(e) Nous démontrons, en raisonnant par récurrence que, pour tout entier $d \in \mathbf{N}$, l'assertion

$$\mathcal{P}(d) \;:\; \text{« } \forall\, P \in \mathbf{R}_d[X] \quad \exists\, (P_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{Z}[X]^{\mathbf{N}} \quad \widetilde{P_n} \xrightarrow[{[a,\,b]}]{\text{CU}} \widetilde{P} \text{ »}$$

est vraie. Nous en déduirons $\mathcal{P}([a,b]) \subset \overline{\mathcal{P}_{\mathbf{Z}}([a,b])}$ et la démonstration sera achevée.

- Initialisation. Soit $P \in \mathbf{R}_0[X]$ (polynôme constant) et $\varepsilon > 0$. D'après (d)

$$\exists\, (p,q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N} \quad \left| \frac{p}{2^q} - P(0) \right| \leqslant \varepsilon$$

  Notons k la fonction constante dyadique sur $[a,b]$ égale à $\dfrac{p}{2^q}$, de sorte que

$$\left|\left| k - \widetilde{P} \right|\right|_\infty \leqslant \varepsilon$$

  D'après (c), il existe $Q \in \mathbf{Z}[X]$ telle que

$$\left|\left| \widetilde{Q} - k \right|\right|_\infty \leqslant \varepsilon$$

  Nous en déduisons que

$$\left|\left| \widetilde{Q} - \widetilde{P} \right|\right|_\infty \leqslant 2\,\varepsilon$$

  L'assertion $\mathcal{P}(0)$ est établie.

- Hérédité. Soit $d \in \mathbf{N}$ tel que l'assertion $\mathcal{P}(d)$ est vraie. Considérons $P \in \mathbf{R}_{d+1}[X]$, que nous écrivons

$$P = A\, X^{d+1} + B$$

  avec $A \in \mathbf{R}_0[X]$ et $B \in \mathbf{R}_d[X]$. D'après l'initialisation et l'hypothèse de récurrence

$$\exists\; (A_n)_{n\in\mathbf{N}}, (B_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{Z}[X]^{\mathbf{N}} \quad \widetilde{A_n} \xrightarrow[{[a,\,b]}]{\text{CU}} \widetilde{A} \quad \text{et} \quad \widetilde{B_n} \xrightarrow[{[a,\,b]}]{\text{CU}} \widetilde{B}$$

  Soit $n \in \mathbf{N}$. Le polynôme $P_n := A_n\, X^{d+1} + B_n$ appartient à $\mathbf{Z}[X]$ et, pour tout $x \in [0,1]$

$$\left| \widetilde{P_n}(x) - \widetilde{P}(x) \right| = \left| \widetilde{A_n}(x)\, x^{d+1} + \widetilde{B_n} x - \widetilde{A}(x)\, x^{d+1} - \widetilde{B} x \right| \leqslant \left| \widetilde{A_n}(x) - \widetilde{A}(x) \right| \, |x|^{d+1} + \left| \widetilde{B_n}(x) - \widetilde{B}(x) \right|$$

  Nous en déduisons que

$$\left|\left| \widetilde{P_n} - \widetilde{P} \right|\right|_\infty \leqslant \left|\left| \widetilde{A_n} - \widetilde{A} \right|\right|_\infty + \left|\left| \widetilde{B_n} - \widetilde{B} \right|\right|_\infty$$

  puis que $\widetilde{P_n} \xrightarrow[{[a,\,b]}]{\text{CU}} \widetilde{P}$.