Exercice 6 : Rayon et somme de :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{4n}{(2n-1)(n+1)} x^n$$

- $R = 1$ (à rédiger)

- $\frac{4X}{(2X-1)(X+1)} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2X-1} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{X+1}$

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n-1} x^n$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n+1}$ ont le même rayon de convergence : 1 (comme avant)

Soit $x \in]-1;1[\setminus \{0\}$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x} \underbrace{\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n}}}_{g(x)}$$

~~f~~ g est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;1[$ comme somme de série entière de rayon 1.

$$\forall x \in]-1;1[, \; g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n$$

$$= -1 + \frac{1}{1-x}$$

Donc $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in]-1;1[, \; g(x) = -x - \ln(1-x) + C$

$x \leftarrow 0$ livre alors $C = 0$.

Donc $\forall x \in]-1;1[$,

$$f(x) = \begin{cases} -1 - \dfrac{\ln(1-x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Soit $x \in]-1;1[$,

$$h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n-1}$$

$\underline{x > 0}$: $h(x) = \sqrt{x} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n-1}}{2n-1}$

$$= \sqrt{x} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2m+1}}{2m-1}$$

Soit $y \in]-1;1[$,

$\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{y^{2m+1}}{2m+1}$ partie impaire de $\underbrace{\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{y^m}{m}}_{-\ln(1-y)}$

donc $\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{y^{2m+1}}{2m+1} = \frac{-\ln(1-y) + \ln(1+y)}{2}$

$$= \ln\left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right)$$

Donc $h(x) = \sqrt{x} \ln\left(\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}\right)$

$x < 0 : \quad x = -(\sqrt{-x})^2$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-(\sqrt{-x})^2)^n}{2n-1}$$

$$= \sqrt{-x} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{-x})^{2n-1}}{2n-1}$$

$$= -\sqrt{-x}\,\mathrm{Arctan}(\sqrt{-x})$$

Exercice en + : $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} ch(\sqrt{x}), & x>0 \\ 1, & x=0 \\ cos(\sqrt{-x}), & x<0 \end{cases} \end{array} \right.$

Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$:

Soit $x>0$, $f(x) = ch(\sqrt{x})$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} \quad (x>0)$$

DSE de ch, $R=+\infty$

Soit $x<0$, $f(x) = cos(\sqrt{-x})$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{-x})^{2n}}{(2n)!}$$

DSE de cos, $R=+\infty$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(-x)^n}{(2n)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$$

En 0 : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{0^n}{(2n)!} = 1 = f(0)$

Ainsi, la série entière $\displaystyle\sum \frac{x^n}{(2n)!}$ a pour rayon de convergence $+\infty$,

et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.

Donc f est $\mathcal{C}^\infty$ car DSE.

Exercice 14 : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $+\infty$.

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{array} \right.$$

① Formule de Cauchy :

Soit $n \in \mathbb{N}$, $0 < r < +\infty$,

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} \, d\theta = a_n r^n .$$

Démontrons la :

$$g_k \left| \begin{array}{l} [0; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C} \\ \theta \longmapsto a_k r^k e^{i\theta k} e^{-in\theta} \end{array} \right.$$

- Les g_k sont continues sur $[0; 2\pi]$.
- $\|g_k\|_{\infty,[0;2\pi]} = |a_k| r^k$

$\sum_{k \geq 0} \|g_k\|_{\infty,[0;2\pi]}$ converge car $\sum a_k r^k$ converge absolument sur $\mathbb{C}$.

Donc par théorème, $\sum_{k=0}^{+\infty} g_k$ est $\mathcal{C}^0$,

et $\sum_{k \geq 0} \int_0^{2\pi} g_k$ converge :

$$\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi} g_n$$

Si $k \neq n$: $\displaystyle\int_0^{2\pi} a_k r^k e^{i\theta(k-n)}\,d\theta$

$$= \left[\frac{1}{i(k-n)} a_k r^k e^{i\theta(k-n)}\right]_{\theta=0}^{2\pi}$$

$$= 0$$

Si $k = n$: $\displaystyle\int_0^{2\pi} a_k r^k \underbrace{e^{i\theta(k-n)}}_{=1}\,d\theta = 2\pi a_k r^k$

Donc $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta = 2\pi a_k r^k$.

② f est bornée : $\exists K \in \mathbb{R}_+, \forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leq K$.

Soit ~~[illegible]~~ $(n, r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+^*$,

$$|a_n r^n| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{|f(re^{i\theta})|}_{\leq K}\,d\theta$$

$$\leq K.$$

Si $n \neq 0$, $a_n \neq 0$, $|a_n r^n| \longrightarrow +\infty$ donc $+\infty \leq K$ absurde

Ainsi, $a_n = 0$.

Donc $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = a_0$.

(3) Notons $P = \sum_{k=0}^{d} b_k X^k$, où $d \in \mathbb{N}^*$.

Soit $r > 0$, $n \geq d+1$,

$$|a_n r^n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{|f(re^{i\theta})|}_{\leq |P(re^{i\theta})| \leq \sum_{k=0}^{d} |b_k r^k|} d\theta$$

donc $|P(re^{i\theta})| \leq \sum_{k=0}^{d} |b_k| r^k$

donc $|a_n r^n| \leq \sum_{k=0}^{d} |b_k| r^k$

donc $|a_n| \leq \sum_{k=0}^{d} |b_k| r^{k-n} \xrightarrow[(k-n<0)]{r \to +\infty} 0$

donc $\forall n \geq d+1$, $a_n = 0$.

Donc $f : z \longmapsto \sum_{k=0}^{d} a_k z^k$.

Exercice 17 :

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma \in S_n$, σ est une symétrie si $\sigma^2 = id_{[\![1,n]\!]}$.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $s_n = Card(\{\sigma \in S_n : \sigma^2 = id_{[\![1,n]\!]}\})$.
$s_0 := 1$.

1) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $s_{n+1} = s_n + n s_{n-1}$:

On pose $A_n = \{\sigma \in S_n : \sigma \circ \sigma = id_{[\![1,n]\!]}\}$.

Soit $\sigma \in A_{n+1}$.

Si $\sigma(n+1) = n+1$:
$\tilde{\sigma} = \sigma_{|[\![1,n]\!]}^{|[\![1,n]\!]}$ est bien définie,

et $\tilde{\sigma} \in A_n$.

Donc $|\{\sigma \in A_{n+1} : \sigma(n+1) = n+1\}| = |A_n|$.

Si $\sigma(n+1) \neq n+1$:
$\exists j \in [\![1,n]\!]$, $\sigma(j) = n+1$, $\sigma(n+1) = j$.

Donc $|\{\sigma \in A_{n+1} : \sigma(n+1) \neq n+1\}| = n \cdot |A_{n-1}|$.

Donc $|A_{n+1}| = |A_n| + n \cdot |A_{n-1}|$.

② $S_n \le n!$,

donc $R\left(\sum \frac{S_n}{n!} z^n\right) \ge 1$.

③ $f \left| \begin{array}{ccc}]-1;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n}{n!} x^n \end{array} \right.$

Montrer que $\forall x \in]-1;1[$, $f'(x) = (1+x)S(x)$:

f est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;1[$, et $\forall x \in]-1;1[$:

$$f^{(1)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{S_n}{n!} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{S_n}{(n-1)!} x^{n-1}$$

$$(1+x) f(x) = (1+x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n}{n!} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n}{n!} x^{n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n}{n!} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{S_{n-1}}{(n-1)!} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n S_{n-1}}{n!} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_{n+1}}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{S_n}{(n-1)!} x^{n-1}$$

④ f est solution de :

(E) : $y' = (x+1)y$ sur $]-1;1[$

donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in]-1;1[, \quad f(x) = \lambda e^{\frac{x^2}{2}+x}$.

$f(0) = 1$ donc :

$$\forall x \in]-1;1[, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y_n}{n!} x^n = e^{\frac{x^2}{2}+x}$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}\right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^m}{m!}\right)$$

On pose :

$$\begin{cases} a_{2n+1} = 0 \\ a_{2n} = \dfrac{1}{2^n n!} \end{cases} \qquad b_m = \frac{1}{m!}$$

Donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y_n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n$

Par unicité des coefficients d'une série entière :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n = n! \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

donc $\displaystyle y_{2n} = (2n)! \sum_{k=0}^{2n} a_k b_{2n-k}$

$$= (2n)! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k k!} \cdot \frac{1}{(2(n-k))!}$$

Exercice 7 : $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2-5n+1}{n!} x^n$

(Rayon et) somme :

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-5n+1}{n!} x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{n(n-1)}{n!}\right) x^n$$

$$- 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} x^n$$

$$+ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= (x^2-4x+1)e^x.$$