TD Correction

Séries Entière interro

$$\sum \left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)x^n$$

$R\left(\sum \frac{1}{2^n}x^n\right)=2$ car $\left(\left(\frac{x}{2}\right)^n\right)$ bornée $\Leftrightarrow |x|\leq 2$

De m, $R\left(\sum \frac{1}{3^n}x^n\right)=3$.

D'où $R\left(\sum\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)x^n\right) \underset{2\neq 3}{=} \min(2,3)=2$.

$$\forall x\in\,]-2;2[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n$$

$$=\frac{1}{1-\frac{x}{2}}+\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=\frac{2}{2-x}+\frac{3}{3-x}$$

$$\sum \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^n$$

$$\left|\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left|\frac{1}{n}\right|.$$

D'où $R\left(\sum \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^n\right)=R\left(\sum\frac{x^n}{n}\right)$

(règle n^α) $=R\left(\sum x^n\right)=1$

Exercice 2

- $\underline{a<0}$, $n^a \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$

D'où $|\arctan(n^a)| \underset{n\to+\infty}{\sim} |n^a|$

Donc $R(\sum \arctan(n^a)x^n) = R(\sum n^a x^n)$
(règle n^α) $= R(\sum x^n) = 1$

- $\underline{a=0}$ $R(\sum \underbrace{\arctan(1)}_{\pi/4 = cst} x^n) = 1$

- $\underline{a>0}$, $n^a \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, $\arctan(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \pi/2$

D'où $|\arctan(n^a)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \pi/2$

Donc $R(\sum \arctan(n^a)x^n) = R(\sum \underbrace{\pi/2}_{cst} x^n) = 1$

Exercice en + Énoncé :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} ch(\sqrt{x}) & si\ x>0 \\ 1 & si\ x=0 \\ cos(\sqrt{-x}) & si\ x<0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Mq f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (Idée : écrire f comme une SE)

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- $x > 0$

$$\operatorname{ch}(\sqrt{x}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{DSE de ch} \\ (R=+\infty)}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = f(x)$$

- $x < 0$

$$\cos(\sqrt{-x}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{DSE de cos} \\ (R=+\infty)}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{-x})^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(-x)^n}{(2n)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = f(x)$$

- $x = 0$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{0^n}{(2n)!} = 1 = f(0)$$

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$ converge (donc $R = +\infty$)

et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$

$\boxed{\text{Donc } f \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R} \text{ comme somme de série entière de rayon de convergence } R = +\infty}$

Exercice 5 $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}$

⚠ $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2n(2n-1)}$, $a_{2n+1} = 0$

Méthode 1 : revenir à la définition

Méthode 2 : d'Alembert pour les $\sum$ numériques.

Soit $x \neq 0$.

$$\left| \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{(2n+2)(2n+1)} \times \frac{2n(2n-1)}{(-1)^n x^{2n}} \right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |x|^2$$

- Si $|x| > 1$, $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}$ DVG

- Si $|x| < 1$, $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}$ CV ABS

$\boxed{\text{D'où } R = 1}$

Calcul de la somme : Soit $x \in]-1;1[$.

$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}$

f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;1[$ et ses dérivées itérées s'obtiennent en dérivant terme à terme.

$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^{m+1} \frac{x^{2m+1}}{2m+1}$$ cht d'indice $m = n-1$

$$= -\arctan(x)$$

Par primitivation termes à termes d'une SE dans l'intervalle ouvert de cv,

$$\int_0^x -\arctan(t)\,dt = f(x) = -\int_0^x 1 \times \arctan(t)\,dt$$

$t \mapsto t$ $\mathcal{C}^1$ sur $[0;x]$
$t \mapsto \arctan(t)$ $\mathcal{C}^1$ sur $[0;x]$.

Par théorème d'intégration par parties,

$$f(x) = -\left(\left[t \times \arctan(t) \right]_0^x - \underbrace{\int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,dt}_{\frac{1}{2}\int_0^x \frac{2t}{1+t^2}\,dt} \right)$$

$$\boxed{\text{Finalement, } f(x) = -x\arctan(x) + \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)}$$

(Une décomposition en éléments simples aurait aussi marché)

Exercice 6

Son rayon est 1 (à rédiger)

$$\left(\frac{4n}{(2n-1)(n+1)} x^n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{4n}{2n^2} x^n = \frac{2}{n} x^n \right)$$

$$\frac{4X}{(2X-1)(X+1)} = \frac{4}{3} \frac{1}{(2X-1)} + \frac{4}{3} \frac{1}{(X+1)}$$

$$\underbrace{\sum \frac{x^n}{2n-1}}_{②} \text{ et } \underbrace{\sum \frac{x^n}{n+1}}_{①}$$ de rayon de cv 1 (marginals)

① $f \left| \begin{array}{l}]-1;1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} \end{array} \right.$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;1[$ car somme de SE sur l'intervalle ouvert de cv.

$g : x \mapsto x f(x)$ $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;1[$.

$$\forall x \in]-1;1[, \; g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x-1+1}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}$$

Par primitivation, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in]-1;1[, \; g(x) = -x - \ln(1-x)$$
Or $g(0) = 0$

Donc $\forall x \in]-1;1[, \; f(x) = \begin{cases} -1 - \dfrac{\ln(1-x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

② Soit $x \in]-1;0[$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-x)^{n+1}}{2n+1}$$

$$= -\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{x})^{2n+2}}{2n+1}$$

$$= -\sqrt{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{-x})^{2n+1}}{2n+1}$$

(② DSE de Arctan ($R=1$))

$$= -\sqrt{-x}\ \arctan(\sqrt{-x})$$

Soit $x \in]0;1[$.

$$(*) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{2n+1} = \sqrt{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{2n+1}$$

Méthode : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^{2n+1}}{2n+1}$ = partie impaire de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n}$

$$= \underline{\qquad\qquad} -\ln(1-y)$$

$$= \frac{-\ln(1-y) + \ln(1+y)}{2} \qquad \text{“}\frac{f(x) - f(-x)}{2}\text{”}$$

D'où $(*) = \sqrt{x}\left(\frac{\ln(1+\sqrt{x}) - \ln(1-\sqrt{x})}{2}\right) = \sqrt{x}\ln\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}\right)$

On recolle ensuite nos résultats

Exercice 16

1) $\frac{d_n}{n!} \leq 1 \quad \forall n \geq 0 \quad (n! = \text{card}(\mathfrak{S}_n))$

Donc par relation de comparaison,

$$R\left(\sum \frac{d_n}{n!} x^n\right) \geq R\left(\sum x^n\right) = 1$$

2) On classe les permutations suivant leur nombre de points fixes.

$\forall k \in [\![0;n]\!]$, on pose ~~$D_k$~~ $A_k = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma \text{ a } k \text{ points fixes}\}$

On a $\mathfrak{S}_n = \bigsqcup_{k=0}^{n} A_k$.

Soit $k \in [\![0;n]\!]$.

Pour construire un élément de A_k, on choisit k points que l'on fixe $\left(\binom{n}{k} \text{ choix}\right)$

et on effectue un dérangement sur les autres (d_{n-k} choix)