

TD – Séries entières

Exercice de la banque CCINP n°2. — On pose $f(x) = \frac{3x+7}{(x+1)^2}$.

1. Décomposer $f(x)$ en éléments simples.
2. En déduire que f est développable en série entière sur un intervalle du type $]-r, r[$ (où $r > 0$). Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité D de ce développement en série entière.
3. (a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$. On pose, pour tout $x \in]-R, R[$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Exprimer, pour tout entier p , en le prouvant, a_p en fonction de $g^{(p)}(0)$.
(b) En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Exercice de la banque CCINP n°14. —

1. Soit a et b deux réels donnés avec $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$, à valeurs réelles. Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f , alors la suite $\left(\int_a^b f_n(x) dx \right)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $\int_a^b f(x) dx$.
2. Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.
3. Démontrer que $\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Exercice de la banque CCINP n°15. — Soit X une partie de \mathbf{R} ou \mathbf{C} .

1. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans \mathbf{R} ou \mathbf{C} . Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X , puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X .
2. Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans \mathbf{R} ou \mathbf{C} , normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X .
3. La série de fonctions $\sum \frac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R \in \mathbf{R}_+^*$?

Exercice de la banque CCINP n°18. — On pose

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad u_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{n}$$

On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$.

1. Étudier la convergence simple de cette série. On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.
2. (a) La fonction S est-elle continue sur D ?
(b) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D .
(c) Étudier la convergence uniforme de cette série sur $[0, 1]$.

Exercice de la banque CCINP n°20. —

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :

$$\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1} \qquad \sum n^{(-1)^n} z^n \qquad \sum \cos(n) z^n$$

Exercice de la banque CCINP n°19. —

1. (a) Justifier, oralement, à l'aide du théorème de dérivation terme à terme, que la somme d'une série entière de la variable réelle est dérivable sur son intervalle ouvert de convergence.
(b) En déduire le développement en série entière à l'origine, de la fonction de la variable réelle : $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$.
2. (a) Donner le développement en série entière à l'origine de la fonction de la variable complexe : $z \mapsto \frac{1}{1-z}$.
(b) Rappeler le produit de Cauchy de deux séries entières.
(c) En déduire le développement en série entière à l'origine, de la fonction de la variable complexe : $z \mapsto \frac{1}{(1-z)^2}$.

Exercice de la banque CCINP n°21. —

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$? Justifier.
3. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} (\sqrt{n})^{(-1)^n} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$?

Exercice de la banque CCINP n°22. —

1. Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.
2. Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence, la fonction

$$f : x \mapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)$$

La série obtenue converge-t-elle pour $x = \frac{1}{4}$? $x = \frac{1}{2}$? $x = -\frac{1}{2}$? En cas de convergence, la somme de cette série est-elle continue en ces points ?

Exercice de la banque CCINP n°23. — Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite complexe telle que la suite $\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ admet une limite.

1. Démontrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1) a_{n+1} x^n$ ont le même rayon de convergence. On le note R .
2. Démontrer que la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^1 sur l'intervalle $] -R, R[$.

Exercice de la banque CCINP n°24. —

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$. On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.
2. Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$ et préciser le rayon de convergence.
3. (a) Déterminer $S(x)$.
(b) On considère la fonction f définie sur \mathbf{R} par $f(0) = 1$, $f(x) = \operatorname{ch}(\sqrt{x})$ si $x > 0$ et $f(x) = \cos(\sqrt{-x})$ si $x < 0$. Démontrer que f est de classe C^∞ sur \mathbf{R} .

Exercice de la banque CCINP n°47. — Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence :

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$
2. $\sum a_n x^n$ avec $\begin{cases} a_{2n} = 4^n \\ a_{2n+1} = 5^{n+1} \end{cases}$

Exercice de la banque CCINP n°51. —

1. Montrer que la série $\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n} (2n+1)}$ converge.

On se propose de calculer la somme de cette série.

2. Donner le développement en série entière en 0 de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.

Dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.

3. En déduire le développement en série entière en 0 de $x \mapsto \text{Arcsin } x$ ainsi que son rayon de convergence.

4. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n} (2n+1)}$.

Exercice 1 ★☆☆ — Soit (a_n) une suite de nombres complexes telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

1. Démontrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ est strictement positif.

2. Démontrer que, pour tout $x \in]-R, R[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{(a_0 - a_1)x - a_0}{x^2 + x - 1}$.

serieEntiereCoefficientsSuiteFibonacci

Exercice 2 ★☆☆ — Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \arctan(n^a) x^n$.

calculRayonConvergenceSerieEntiere1

Exercice 3 ★☆☆ — Déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{\sin(n)}{n} x^n$.

calculRayonConvergenceSerieEntiere2

Exercice 4 ★☆☆ — Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction

$$f: x \mapsto \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

en précisant le rayon de convergence de la série entière qui apparaît.

calculDeveloppementSerieEntiereFonction1

Exercice 5 ★☆☆ — Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}$.

calculDeveloppementSerieEntiereFonction2

Exercice 6 ★☆☆ — Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de $\sum_{n \geq 1} \frac{4n}{(2n-1)(n+1)} x^n$.

calculDeveloppementSerieEntiereFonction3

Exercice 7 ★☆☆ — Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 - 5n + 1}{n!} x^n$.

calculDeveloppementSerieEntiereFonction4

Exercice 8 ★☆☆ — Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de $\sum_{n \geq 1} \frac{x^{4n+1}}{4n^2 - 1}$.

calculDeveloppementSerieEntiereFonction5

Exercice 9 ★☆☆ — Démontrer que la fonction $f: x \mapsto e^x \cos(x)$ est développable en série entière sur \mathbf{R} et déterminer les coefficients de son développement en série entière.

calculDeveloppementSerieEntiereProduitCauchy

Exercice 10 ★☆☆ — Soit $(d_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par $d_0 = 1, d_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}, d_{n+2} = (n+1)(d_n + d_{n+1})$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}, \frac{n!}{3} \leq d_n \leq n!$. En déduire le rayon de convergence R de la série entière $\sum \frac{d_n}{n!} x^n$.
2. Démontrer que la fonction

$$S \left| \begin{array}{l}] - R, R[\longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n \end{array} \right.$$

est solution de l'équation différentielle

$$(1 - x)y' - xy = 1$$

sur $] - R, R[$, puis exprimer S à l'aide des fonctions usuelles.

calculSommeSerieEntiereEquationDifferentielle

Exercice 11 ★☆☆ — Soit R un nombre réel strictement positif. Démontrer que si une série entière $\sum a_n x^n$ converge normalement sur le disque ouvert $D(0, R)$ alors la série numérique $\sum a_n R^n$ converge.

serieEntiereConvergenceNormaleDisqueOuvertConvergence

Exercice 12 ★★☆☆ — Soit (a_n) une suite de nombres complexes. On suppose qu'il existe $\ell \in [0, +\infty]$ tel que

$$\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$$

Démontrer que le rayon de convergence $\sum a_n z^n$ est $\frac{1}{\ell}$. Il s'agit de la règle de Cauchy.

regleCauchyRayonConvergenceSerieEntiere

Exercice 13 ★★☆☆ — Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1, de somme f , telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}, a_n \in \mathbf{R}_+$.

1. Supposons que la série numérique $\sum a_n$ converge. Montrer que f est définie et continue sur $\overline{D(0, 1)}$.
2. Supposons que la série numérique $\sum a_n$ diverge. Montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty$.

variationLemmeAbelRadial

Exercice 14 ★★☆☆ — Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $+\infty$. On note f sa somme.

1. Montrer que pour tout $r > 0$:

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ni\theta} d\theta.$$

Cette égalité est connue sous le nom de formule de Cauchy.

2. Supposons f bornée. Montrer que f est constante. Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Liouville.
3. Supposons qu'il existe un polynôme P de degré $d \in \mathbf{N}^*$ tel que, pour tout $z \in \mathbf{C}, |f(z)| \leq |P(z)|$. Montrer que f est un polynôme de degré inférieur ou égal à d .

formuleCauchyTheoremeLiouville

Exercice 15 ★★☆☆ — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, notons B_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. On pose $B_0 = 1$.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$.
2. Démontrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{B_n}{n!} x^n$ n'est pas nul.
3. On note f la somme de la série entière $\sum \frac{B_n}{n!} x^n$. Expliciter $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles, pour tout $x \in]-R, R[$.
4. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$.

calculNombrePartitionsSerieEntiere

Exercice 16 ★★☆☆ — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, notons d_n le nombre de permutations sans points fixe de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$. On pose $d_0 = 1$.

1. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{d_n}{n!} x^n$ est supérieur ou égal à 1.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_{n-k}$.
3. Si $x \in]-1, 1[$, calculer $e^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.

calculNombreDerangementsSerieEntiere

Exercice 17 ★★☆☆ — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Une involution de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ est une application $s: \llbracket 1, n \rrbracket \longrightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$ telle que $s \circ s = \text{id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}$. On note I_n le nombre d'involutions de $\llbracket 1, n \rrbracket$. On pose en outre $I_0 = 1$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $I_{n+1} = I_n + n I_{n-1}$.
2. Justifier que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{I_n}{n!} z^n$ est supérieur ou égal à 1.

Soit f la fonction définie par

$$f \left| \begin{array}{l}]-1, 1[\longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n \end{array} \right.$$

3. Démontrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $S'(x) = (1+x)S(x)$.
4. En déduire une expression de I_n , pour tout $n \in \mathbf{N}$.

calculNombreInvolutionsSerieEntiere

Exercice 18 ★★★ — Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R_a > 0$, telle que $a_0 = 1$. Démontrer qu'il existe une série entière $\sum b_n z^n$ de rayon de convergence $R_b > 0$ telle que

$$\forall z \in D(0, \min(R_a, R_b)) \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right) = 1$$

inverseSerieEntiereNonNulleEnZero [indication(s)]

Exercice 19 ★★★ — Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière, de rayon de convergence $R > 0$, de somme notée f .

1. Soit $z_0 \in \mathbf{C}$ tel que $|z_0| < R$. Démontrer qu'il existe une suite de nombres complexes $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que

$$\forall z \in D(z_0, R - |z_0|), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n$$

Ce résultat exprime l'analyticité de la somme d'une série entière sur son disque ouvert de convergence.

2. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$?

analyticiteSommeSerieEntiereDisqueOuvertConvergence

Exercice 20 ★★★ — Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et de somme

$$f \left| \begin{array}{l} D(0, R) \longrightarrow \mathbf{C} \\ z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{array} \right.$$

- On suppose qu'il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in D(0, R)^{\mathbf{N}}$ non stationnaire, convergeant vers 0 et telle que $f(u_n) = 0$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que la fonction f est nulle.
- On suppose que la fonction f possède une infinité de zéros dans un compact de $D(0, R)$. Démontrer que la fonction f est nulle. On pourra appliquer le résultat obtenu à la question 1 de l'exercice 19.

principeZerosIsoles

Exercice 21 ★★★ — Soit E un ensemble non vide muni d'une loi interne $*$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note a_n le nombre de parenthésages possibles d'un produit de n éléments de E . On a $a_1 = 1$ par convention et, par exemple

- $a_2 = 1 : (a * b)$
- $a_3 = 2 : (a * b) * c, a * (b * c)$
- $a_4 = 5 : (a * b) * (c * d), ((a * b) * c) * d, (a * (b * c)) * d, a * ((b * c) * d), a * (b * (c * d))$

- Démontrer que, pour tout $n \geq 2$, $a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$.
- Soit f la somme de la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$. On suppose que le rayon R de cette série entière est strictement positif. Démontrer que, pour tout $x \in]-R, R[$, $(f(x))^2 - f(x) + x = 0$.
- Calculer R et f .
- En déduire la valeur de a_n , pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

calculNombreParenthesagesSerieEntiere [indication(s)]

Exercice 22 ★★★ — Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière, de rayon de convergence $R \geq 1$, de somme notée f .

1. Calculer pour tout $r \in [0, 1[$

$$m_f(r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$$

- On suppose que la série $\sum |a_n|^2$ converge. Montrer que la fonction $r \mapsto m_f(r)$ est bornée sur $[0, 1[$.
- Exhiber un exemple pour lequel m_f est bornée et f est non bornée sur $D(0, 1)$.
- On suppose à nouveau que la série $\sum |a_n|^2$ converge. Montrer que, pour tout $r \in [0, 1[$ et tout $\theta \in \mathbf{R}$:

$$|f(re^{i\theta})|^2 \leq \frac{1}{1-r^2} \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2.$$

identiteParsevalSerieEntiere

Exercice 23 ★★★ — Soient $a > 0$ et $f :]-a, a[\longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe C^∞ . On suppose que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f^{(n)} \geq 0$ sur $] - a, a[$.

1. Donner des exemples de telles fonctions.
 2. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.
- Il s'agit d'un théorème dû à Bernstein.

theoremeBernsteinSeriesEntieres

Exercice 24 ★★★ — Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. Notons, pour tout $z \in D(0, 1)$:

$$f(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

On suppose que la série $\sum a_n$ converge et on note ℓ sa somme. Fixons $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et notons :

$$\Delta(\theta_0) := \{z \in D(0, 1) : \exists \rho > 0, \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0], z = 1 - \rho e^{i\theta}\}.$$

Le but de cet exercice est de démontrer que :

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \Delta(\theta_0)}} f(z) = \ell.$$

Il s'agit du théorème d'Abel angulaire.

1. Notons $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$. Montrer que :

$$\forall z \in D(0, 1), \quad f(z) - \ell = (z - 1) \sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n.$$

On pourra remarquer que pour tout $n \geq 1$, $a_n = R_{n-1} - R_n$ et effectuer une transformation d'Abel.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $z \in \Delta(\theta_0)$:

$$|f(z) - \ell| \leq |z - 1| \sum_{n=0}^N |R_n| + \frac{\cos(\theta_0) \varepsilon}{2} \frac{|z - 1|}{1 - |z|}.$$

3. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $z \in D(1, \alpha) \cap \Delta(\theta_0)$, $|f(z) - \ell| \leq \varepsilon$. Conclure.

theoremeAbelAngulaire

Exercice 25 ★★★ — Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. Notons $f(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, pour tout $z \in D(0, 1)$. On suppose que

$$\exists \ell \in \mathbf{C}, \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \ell$$

et que $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ quand $n \rightarrow +\infty$. Le but de cet exercice est de montrer que la série $\sum a_n$ converge et que sa somme vaut ℓ . Il s'agit d'un théorème dû à Tauber.

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que $\forall x \in [0, 1[$:

$$\left| \sum_{k=0}^n a_k - f(x) \right| \leq (1 - x) \sum_{k=0}^n k |a_k| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k |a_k|}{n} x^k.$$

2. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. Montrer qu'il existe $M > 0$ et $N \in \mathbf{N}$ tels que pour tout $n \geq N$:

$$\left| \sum_{k=0}^n a_k - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) \right| \leq (M + 1) \varepsilon.$$

3. Conclure.

theoremeTauberienFaible

Exercice 26 ★★★ — Soient $\theta \in \mathbf{R}$ et la fonction f définie par

$$f: z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} z^n$$

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n} z^n$.
2. Déterminer une expression de $f(z)$, pour tout $z \in [0, 1[$.
3. Y a-t-il convergence sur le cercle unité ?
4. Peut-on déduire l'expression sur le cercle unité de l'expression sur le disque ouvert ?

etudeSommeSerieEntiereBordDisqueConvergenceTransformeeAbel

inverseSerieEntiereNonNulleEnZero [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 18

Raisonnement par analyse et synthèse. Supposer l'existence d'une série entière $\sum b_n z^n$ de rayon de convergence $R_b > 0$ vérifiant

$$\forall z \in D(0, \min(R_a, R_b)) \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right) = 1$$

En déduire que $b_0 = 1$ et que

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad b_n = - \sum_{k=0}^n b_k a_{n+1-k}$$

Fixer un réel r tel que $0 < r < R$. Il existe donc un réel strictement positif M_r tel que

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad |a_n| \leq \frac{M_r}{r^n}$$

Démontrer que

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad |b_n| \leq \frac{M_r (M_r + 1)^{n-1}}{r^n}$$

Indication(s) pour l'exercice 21

- 1.
- 2.
3. Soit $x \in]-R, R[$ fixé. Le nombre $f(x)$ est racine du polynôme $X^2 - X + x$ donc :

$$f(x) \in \left\{ \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}, \frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2} \right\}$$

Si on pose $\rho := \min \left\{ R, \frac{1}{4} \right\} > 0$, alors :

$$\forall x \in]-\rho, \rho[\quad g(x) := \frac{2f(x) - 1}{\sqrt{1 - 4x}} \in \{-1, 1\}$$

La fonction g étant continue sur le connexe par arcs $]-\rho, \rho[$, l'ensemble $g(]-\rho, \rho[)$ est une partie connexe par arcs de $\{-1, 1\}$. Nous en déduisons que la fonction g est constante sur $]-\rho, \rho[$. Comme $g(0) = -1$, il vient :

$$\forall x \in]-\rho, \rho[\quad f(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}$$

- 4.