TD – Révisions sur les fonctions de la variable réelle à valeurs dans R

1. Exercices sur la continuité

Exercice 1. — *Étudier la continuité de l'application*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbf{Q} \\ x & \text{si } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases} \end{array} \right.$$

Exercice 2. — *Soient a, b des réels tels que $a < b$, $f \colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$, $g \colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$. On suppose que $|f| = |g|$ et que, pour tout $x \in \,]a,b[$, $f(x) \neq 0$. Démontrer que $f = g$ ou $f = -g$.*

Exercice 3. — *Soit $f \colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue et périodique. Démontrer que la fonction f est bornée.*

Exercice 4. — *Soit $f \colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction périodique telle que f possède une limite $\ell \in \mathbf{R}$ en $+\infty$. Démontrer que la fonction f est constante.*

Exercice 5. — *Soit $f \colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue telle que :*

$$f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

Démontrer que f admet un minimum sur $\mathbf{R}$.

Exercice 6. — *Soit $p, q \in \mathbf{R}_+^*$ et $f \colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue telle que $f(0) \neq f(1)$. Démontrer que :*

$$\exists\, x_0 \in \,]0,1[\quad p\, f(0) + q\, f(1) = (p+q)\, f(x_0)$$

Exercice 7. — *Soit $f \colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une application. Démontrer que f possède un point fixe dans les deux cas suivants.*

1. *L'application f est continue sur $[0,1]$.*
2. *L'application f est croissante sur $[0,1]$. On pourra considérer la borne supérieure de $A = \{x \in [0,1] \ : \ x \leqslant f(x)\}$.*

Exercice 8. — *Soit $f \colon \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}_+$ une fonction continue telle que :*

$$\exists\, \ell \in \,]0,1[\quad f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$$

Démontrer que la fonction f possède un point fixe.

Exercice 9. — *Soit $f \colon \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}$ une application croissante telle que l'application*

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)}{x} \end{array} \right.$$

soit décroissante. Démontrer que la fonction g est continue ? Qu'en est-il de la fonction f ?

Exercice 10. — *Soit $f \colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une fonction continue telel que $f(0) = f(1)$. Démontrer que*

$$\exists\, c \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad f(c) = f\left(c + \frac{1}{2}\right)$$

Exercice 11. — *Démontrer que la fonction*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt[3]{|x|} \end{array} \right.$$

est uniformément continue sur $\mathbf{R}$*.*

Exercice 12. — *Soit* $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ *une fonction continue telle que*

$$f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0 \qquad et \qquad f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Démontrer que la fonction f *est uniformément continue sur* $\mathbf{R}$*.*

---

2. Exercices sur la dérivabilité

Exercice 13. — *Soit* $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ *une fonction bornée et dérivable sur* $\mathbf{R}$*. On suppose qu'il existe* $\ell \in \mathbf{R}$ *tel que* $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$*. Démontrer que* $\ell = 0$*.*

Exercice 14. — *Soient* I *un intervalle de* $\mathbf{R}$ *non vide et non réduit à un point et* $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ *une fonction dérivable sur* I*. Soit* $a \in I$ *tel que* f *est continue en* a *et* $f'(a) \neq 0$*. Démontrer qu'il existe* $\delta > 0$ *tel que la fonction*

$$f_{|I\cap[a-\delta,a+\delta]} \left| \begin{array}{ccc} I\cap[a-\delta,a+\delta] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

est injective.

Exercice 15. — *Soit* $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ *une fonction dérivable sur* $[0,1]$ *telle que* $f(0) = 0$ *et* $f(1) = 1$*. Démontrer que*

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^* \quad \exists\,(x_1,\ldots,x_n) \in [0,1]^n \quad x_1 < \ldots < x_n \quad et \quad \sum_{k=1}^{n} f'(x_k) = n\ .$$

Exercice 16. — *Soit la fonction*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 1 + \dfrac{1}{4}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{array} \right.$$

1. *Déterminer* $I = f(\mathbf{R}^*)$*, puis démontrer que* I *est stable par* f*.*
2. *Démontrer que la fonction* f *est* $\dfrac{4}{9}$*-lipschitzienne sur* I*.*
3. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *la suite définie par la donnée de* $u_0 \in I$ *et la relation de récurrence* $u_{n+1} = f(u_n)$*, valable pour tout* $n \in \mathbf{N}$*. Démontrer que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge vers l'unique point fixe* α *de* f *sur* I *et discuter la vitesse de convergence vers 0 de la suite* $(u_n - \alpha)_{n\in\mathbf{N}}$*.*

Exercice 17. — *Soit la fonction* f *définie par*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} e^{-1/x^2} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0\ . \end{cases} \end{array} \right.$$

Démontrer que la fonction f *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbf{R}$*.*

Exercice 18. — *Démontrer que la fonction*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0\ . \end{cases} \end{array} \right.$$

est dérivable sur $\mathbf{R}$*, mais n'est pas de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbf{R}$.

Exercice 19. — *Démontrer que la fonction*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x\, e^{-x} \end{array} \right.$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbf{R}$ *et calculer ses dérivées itérées.*

Exercice 20. — *Posons, pour tout* $n \in \mathbf{N}$

$$g_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^{n-1}\, e^{1/x} \end{array} \right.$$

Calculer $g_n^{(n)}$*, pour tout* $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 21. — *Pour tout* $n \in \mathbf{N}^*$*, on pose* $S_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$.

1. *Démontrer que la suite* $(S_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *est convergente. On note* S *sa limite.*
2. *On considère une fonction* $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ *telle que* f *soit dérivable en* 0 *à droite et* $f(0) = 0$*. On pose* $\delta = f_d'(0)$ *et, pour tout* $n \in \mathbf{N}^*$*,* $\Delta_n(f) = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} f\left(\frac{1}{k}\right)$*. Démontrer que la suite* $(\Delta_n(f))_{n\in\mathbf{N}^*}$ *converge vers* $\delta\, S$.
3. *Déterminer* S *en utilisant la fonction* $x \longmapsto \ln(1+x)$.
4. *Étudier les limites éventuelles de* $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \sin\left(\frac{1}{k}\right)$ *et* $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \sin^2\left(\frac{1}{k}\right)$ *lorsque* n *tend vers* $+\infty$.

Exercice 22. — *Soit* $f\colon \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}$ *une fonction continue sur* $\mathbf{R}_+$*, dérivable sur* $\mathbf{R}_+^*$*, telle que* $f(0) = 0$ *et* f' *est croissante sur* $\mathbf{R}_+^*$*. Démontrer que la fonction*

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)}{x} \end{array} \right.$$

est croissante sur $\mathbf{R}_+^*$.

Exercice 23. — *Soit* $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ *une fonction dérivable sur* $[0,1]$ *telle que* $f(0) = 0$ *et, pour tout* $x \in [0,1]$*,* $f'(x) \neq 0$*. Démontrer que la fonction* f *garde un signe constant sur* $[0,1]$.

Exercice 24. — *Soit* $f\colon \mathbf{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{R}_+^*$ *une fonction dérivable sur* $\mathbf{R}_+^*$ *telle que* $x\, f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.

1. *Démontrer que* f *admet une limite dans* $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$.
2. *Démontrer que* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 25. — *Soient des réels* a, b *tels que* $a < b$*, une fonction* $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[a,b]$ *et telle que* f'' *existe sur* $]a,b[$*. Soit* $x \in\,]a,b[$*. Démontrer*

$$\exists\, c \in\,]a,b[\quad f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,(x-a) = \frac{(x-a)\,(x-b)}{2}\, f''(c)$$

Exercice 26. — *Soit un réel* $\alpha \in\,]0,1[$.

1. *Démontrer*

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^* \qquad \frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \leqslant (n+1)^{\alpha} - n^{\alpha} \leqslant \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}$$

2. *En déduire que* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1-\alpha}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha}}{\alpha}$.

Exercice 27. — *Nous confondons polynômes et fonctions polynomiales, ce qui est sans conséquence, car les corps de bases* $\mathbf{R}$ *et* $\mathbf{C}$ *considérés sont infinis.*

1. *Soit un polynôme* $P \in \mathbf{R}[X]$ *qui est scindé à racines simples sur* $\mathbf{R}$. *Démontrer que le polynôme dérivé* P' *est scindé à racines simples sur* $\mathbf{R}$.
2. *Donner un exemple de polynôme* $P \in \mathbf{C}[X]$ *qui est scindé à racines simples sur* $\mathbf{C}$ *et tel que le polynôme* P' *n'est pas scindé à racines simples sur* $\mathbf{C}$.
3. *Soit un polynôme* $P \in \mathbf{R}[X]$ *qui est scindé sur* $\mathbf{R}$. *Démontrer que le polynôme dérivé* P' *est scindé sur* $\mathbf{R}$.

---

3. Exercices sur la convexité

Exercice 28. — *Soit* $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ *une fonction convexe et concave. Démontrer que* f *est affine.*

Exercice 29. — *Soit* $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$. *Démontrer que pour tout* $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leqslant n \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Exercice 30. — *Soit* $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$. *Démontrer que pour tout* $(x_1, \dots, x_n) \in \left(\mathbf{R}_+^*\right)^n$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \geqslant n^2$$

Exercice 31. — *Soit* $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ *une fonction convexe continue. Démontrer que l'ensemble des points où* f *admet son minimum est un segment.*

Exercice 32. — *Soit* $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ *une fonction convexe continue. Démontrer que* f *atteint son maximum en* a *ou en* b.

Exercice 33. — *Soit* $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ *une fonction strictement convexe, i.e. telle que, pour tous réels* x, y *distincts*

$$\forall\, \lambda \in \,]0,1[\quad f(\lambda\, x + (1-\lambda)\, y) < \lambda\, f(x) + (1-\lambda)\, f(y)$$

Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ *admet au plus deux solutions.*

Exercice 34. — *Soit* $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ *une fonction convexe majorée. Démontrer que* f *est constante.*

Exercice 35. — *Soit* $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ *une fonction convexe admettant un minimum local en un point intérieur de* I. *Démontrer qu'il s'agit d'un minimum global.*

Exercice 36. — *Soit* I *un intervalle de* $\mathbf{R}$. *Soit* $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ *une fonction convexe.*

1. *Démontrer que* f *est dérivable à droite et à gauche en tout point de* $\overset{o}{I}$ *(intérieur de l'intervalle* I*).*
2. *En déduire que* f *est continue sur* $\overset{o}{I}$.

Exercice 37. — *Soit* $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ *une fonction convexe dérivable et soit* $x_0 \in I$.

1. *Démontrer que l'intersection du graphe de f et de sa tangente au point d'abscisse x_0 est un intervalle de $\mathbf{R}^2$.*
2. *Que dire de plus si f est strictement convexe, i.e. si pour tous points distincts x, y de I*

$$\forall\, \lambda \in \,]0,1[\quad f(\lambda\, x + (1-\lambda)\ \ y) < \lambda\, f(x) + (1-\lambda)\, f(y)$$

Exercice 38. — *Soit $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue.*

1. *Justifier l'existence de réels a et b tels que pour tout $x \in [0;1]$, $a \leqslant f(x) \leqslant b$.*
2. *Justifier que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx \in [a;b]$.*
3. *Soit $\varphi\colon [a;b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe continue. Démontrer que*

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x)\ dx\right) \leqslant \int_0^1 \varphi(f(x))\ dx \qquad [\textit{inégalité de Jensen}]$$

Exercice 39. — *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice bistochastique, i.e. telle que :*

(a) les coefficients de A sont positifs ou nuls ;

(b) la somme des coefficients de chaque ligne de A vaut 1 ;

(c) la somme des coefficients de chaque colonne de A vaut 1.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ tel que $x_1 > 0, \dots, x_n > 0$ et $Y = AX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Démontrer que $\displaystyle\prod_{i=1}^n x_i \leqslant \prod_{i=1}^n y_i$.

Exercice 40. — *Soient $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$ et $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbf{R}_+)^n$. Alors*

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \qquad [\textit{inégalité arithmético-géométrique}]$$

Exercice 41. — *Soit g la fonction définie par*

$$g \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^x \end{array} \right. \qquad \left[\textit{on rappelle que } 0^0 = 1\right]$$

1. *Justifier que la fonction g est continue sur $[0,1]$.*
2. *Soit un entier $n \geqslant 2$. Démontrer*

$$\forall\, (x_1, \dots, x_n) \in [0,1]^n \quad \left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right)^{\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}} \leqslant \frac{x_1^{x_1} + \ldots + x_n^{x_n}}{n}$$

Exercice 42. — *Soient des réels $p > 0, q > 0$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ et un entier $n \geqslant 2$.*

1. *Démontrer*

$$\forall\, (x, y) \in \left(\mathbf{R}_+^*\right)^2 \qquad x\, y \leqslant \frac{1}{p}\, x^p + \frac{1}{q}\, y^q \qquad [\textit{inégalité d'Young}]$$

2. *Démontrer*

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbf{R}_+)^n \quad \forall (y_1, \dots, y_n) \in (\mathbf{R}_+)^n \quad \sum_{i=1}^n x_i\, y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad [\textit{inégalité de Hölder}]$$

On pourra commencer par traiter le cas où $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^p = 1$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^n y_i^q = 1$.

3. *Supposons que $p \geqslant 1$. Démontrer*

$$\forall\, (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^{2n} \quad \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad [\textit{inégalité de Minkowski}]$$

Exercice 43. — *Soit une fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telle que*

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

Démontrer que la fonction f est convexe.