TD Correction

Exercice 5 (TD espace préhilbertiens)

Q1) Posons : $\forall n \in \mathbb{N}, \ w_n = X^n(1-X)^n$

On a $\deg(w_n) = \deg(X^n) + \deg((1-X)^n) = 2n$

$$\mathrm{dom}(w_n) = \mathrm{dom}(X^n) * \mathrm{dom}((1-X)^n)$$
$$= 1 \times (-1)^n = (-1)^n$$

Rq : mieux vaut parler de $[X^n]_n$ que $\mathrm{dom}(X^n)$, + prudent

$$\boxed{\text{Donc } \deg(L_n) = \deg(w_n^{(n)}) = 2n - n = n}$$

Soit $(a_k)_{0 \leq k \leq 2n} \in \mathbb{R}^{2n+1}$, $w_n = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$ avec $a_{2n} = (-1)^n$

donc $w_n^{(n)} = \sum_{k=n}^{2n} a_k \frac{k!}{(k-n)!} X^{k-n}$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_{n+k} \frac{(n+k)!}{k!} X^k$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathrm{dom}(L_n) = \frac{(2n)!}{n!} a_{2n} = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}}$$

Q2) Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ tels que $P(0)=P(1)=0$.

Par théorème d'intégration par partie,

$$\int_0^1 P'(x)Q(x)\,dx = \underbrace{\left[P(x)Q(x)\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 P(x)Q'(x)\,dx$$

$\boxed{\text{Donc } \langle P', Q\rangle = \langle P, Q'\rangle}$

Q3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1) Montrons que $\forall k \in [\![0;n]\!],\ w_n^{(k)}(0) = w_n^{(k)}(1) = 0$

Soit $f : \begin{vmatrix} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n \end{vmatrix}$, $g : \begin{vmatrix} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (1-x)^n \end{vmatrix} \in \mathcal{C}^n([0;1],\mathbb{R})$

Par Leibniz,

$$\forall x \in [0;1],\ w_n^{(k)}(x) = (fg)^{(k)}(x)$$
$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)}(x) g^{(k-i)}(x)$$
$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{n!}{(n-i)!} x^{n-i} (-1)^{k-i} \frac{n!}{(n-k+i)!} x^{n-k+i}$$

Puisque $\forall i \in [\![0;k]\!],\ n-i > 0$ et $n-k+i > 0$.

donc, $w_n^{(k)}(0) = w_n^{(k)}(1) = 0$.

② Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$

$\forall k \in [\![0;n]\!]$, H_k : " $\langle \omega_n^{(k)}, Q^{(n-k)} \rangle = 0$ "

<u>$k=0$</u> $\quad \langle \omega_n, Q^{(n)} \rangle = \langle \omega_n, 0 \rangle = 0$. $\quad (\deg(Q) < n)$

Supposons H_k pour $k \in [\![0;n-1]\!]$ fixé.

$\langle \omega_n^{(k)}, Q^{(n-k)} \rangle = -\langle \omega_n^{(k+1)}, Q^{(n-k-1)} \rangle$

$= 0$

Donc $\langle \omega_n^{(k+1)}, Q^{(n-(k+1))} \rangle = 0$.

Conclusion : H_n est vraie

Donc $\langle \omega_n^{(n)}, Q^{(n-n)} \rangle = 0$

$\boxed{\text{Donc } \langle L_n, Q \rangle = 0.}$

(Q4) Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tq $m \neq n$

- 1er cas : $m < n$
  donc $L_m \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$
  donc $\langle L_n, L_m \rangle = 0$

  2e cas : $n < m$
  donc ---

- $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est échelonnée en degrés au sens fort car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(L_n) = n$.
  Donc $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une base de $\mathbb{R}[X]$

$\boxed{\text{D'où } (L_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ base orthogonale de } \mathbb{R}[X]}$