TD – Révisions sur les espaces préhilbertiens

Exercice de la banque CCINP n°39. — *On note ℓ^2 l'ensemble des suites $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.*

1. (a) *Démontrer que, pour $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^2$ et $y=(y_n)_{n\in\mathbf{N}}\in\ell^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge. On pose alors $\langle\, x\,,\, y\,\rangle=\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.*

   (b) *Démontrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.*

   Dans la suite de l'exercice, on admet que $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ est un produit scalaire sur ℓ^2. On suppose que ℓ^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée, notée $||\cdot||$.
2. *Soit $p\in\mathbf{N}$. Pour tout $x=(x_n)\in\ell^2$, on pose $\varphi(x)=x_p$. Démontrer que φ est une application linéaire et continue de ℓ^2 dans $\mathbf{R}$.*
3. *On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles, c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes. Déterminer $F^\perp$. Comparer F et $\left(F^\perp\right)^\perp$.*

Exercice de la banque CCINP n°76. — *Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$. On pose, pour tout $x\in E$, $||\,x\,||=\sqrt{\langle\, x\,,\, x\,\rangle}$.*

1. (a) *Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

   (b) *Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.*
2. *Soit $E=\{f\in\mathcal{C}\left([a,b]\,,\mathbf{R}\right)\ :\ \forall\, x\in[a,b]\ \ f(x)>0\}$. Prouver que l'ensemble $\left\{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\times\int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\ :\ f\in E\right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.*

Exercice de la banque CCINP n°77. — *Soit E un espace euclidien.*

1. *Soit A un sous-espace vectoriel de E. Démontrer que $\left(A^\perp\right)^\perp=A$.*
2. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.*

   (a) *Démontrer que $(F+G)^\perp=F^\perp\cap G^\perp$.*

   (b) *Démontrer que $(F\cap G)^\perp=F^\perp+G^\perp$.*

Exercice de la banque CCINP n°78. — *Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E. On note $\langle\, x\,,\, y\,\rangle$ le produit scalaire de x et de y et $||\cdot||$ la norme euclidienne associée.*

1. *Soit u un endomorphisme de E, tel que, pour tout $x\in E$, $||u(x)||=||x||$.*

   (a) *Démontrer que, pour tout $(x,y)\in E^2$, $\langle\, x\,,\, y\,\rangle\in\langle\, u(x)\,,\, u(y)\,\rangle=\langle\, x\,,\, y\,\rangle$.*

   (b) *Démontrer que u est bijectif.*
2. *On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E. C'est -à-dire $\mathcal{O}(E)=\{u\in\mathcal{L}\left(E\right)\ :\ \forall x\in E\quad ||u(x)||=||x||\}$. Démontrer que $\mathcal{O}(E)$, muni de la loi $\circ$, est un groupe.*
3. *Soit $u\in\mathcal{L}(E)$. Soit $e=(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ une base orthonormée de E. Prouver que :*

$$u\in\mathcal{O}(E)\iff(u(e_1),u(e_2),\ldots,u(e_n))\ \text{est une base orthonormée de } E$$

Exercice de la banque CCINP n°79. — *Soit a et b deux réels tels que $a<b$.*

1. *Soit h une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$. Démontrer que :*

$$\int_a^b h(x)dx=0\implies h=0$$

2. *Soit E le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$. On pose, pour tout $(f,g)\in E^2$, $\langle\, f\,,\, g\,\rangle=\int_a^b f(x)g(x)dx$. Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.*
3. *Majorer $\int_0^1\sqrt{x}\,e^{-x}dx$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

Exercice de la banque CCINP n°80. — *Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.*

1. *Démontrer que $\langle f , g \rangle = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\, dt$ définit un produit scalaire sur E.*
2. *Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f\colon x \longmapsto \cos x$ et $g\colon x \longmapsto \cos(2x)$.Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u\colon x \longmapsto \sin^2 x$.*

Exercice de la banque CCINP n°81. — *On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ l'application φ par $\varphi(A, A') = \operatorname{tr}\left(A^\top A'\right)$. On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \; : \; (a,b) \in \mathbf{R}^2 \right\}$.*

1. *Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.*
2. *Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.*
3. *Déterminer le projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.*
4. *Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.*

Exercice de la banque CCINP n°82. — *Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$. On admet que, pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$. Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $\langle A , A' \rangle = aa' + bb' + cc' + dd'$.*

1. *Démontrer que $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.*
2. *Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.*

Exercice de la banque CCINP n°92. — *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n. On pose, pour tout $(A, B) \in E^2$, $\langle A , B \rangle = \operatorname{tr}\left(A^\top B\right)$ où tr désigne la trace et $A^\top$ désigne la transposée de la matrice A.*

1. *Prouver que $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.*
2. *On note $S_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque $A^\top = -A$. On note $A_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E. On admet que $S_n(\mathbf{R})$ et $A_n(\mathbf{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.*
   (a) *Prouver que $E = S_n(\mathbf{R}) \oplus A_n(\mathbf{R})$.*
   (b) *Prouver que $A_n(\mathbf{R})^\perp = S_n(\mathbf{R})$.*
3. *Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E. Déterminer $F^\perp$.*

Exercice 1 ★☆☆ — *On note $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de l'espace $\mathbf{R}^3$, que l'on munit $\mathbf{R}^3$ de son produit scalaire usuel.*

1. *Appliquer l'algorithme de Schmidt à la base :*

$$\underline{u} := (u_1 := (1,0,1), u_2 := (1,1,1), u_3 := (-1,-1,0))$$

   de $\mathbf{R}^3$. On notera $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base orthonormée de $\mathbf{R}^3$ ainsi obtenue.
2. *D'après le cours, quelles propriétés remarquables possède la matrice de passage $P_{\underline{u} \to \underline{\varepsilon}}$?*
3. *Expliciter la matrice $P_{\underline{u} \to \underline{\varepsilon}}$.*
4. *Que vaut le produit $P^\top P$, où $P := P_{\underline{e} \to \underline{\varepsilon}}$?*
5. *Comment retrouver le résultat de la question précédente sans aucun calcul ?*

`orthonormalisationGramSchmidtR3`

Exercice 2 ★☆☆ — *Soit un entier $n \geqslant 2$.*

1. *Démontrer que :*

$$\langle \cdot , \cdot \rangle \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_n[X]^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (P,Q) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(i)\,Q(i) \end{array} \right.$$

est un produit scalaire sur $\mathbf{R}_n[X]$.

2. *Donner une base orthonormée de l'espace euclidien $(\mathbf{R}_n[X], \langle \cdot , \cdot \rangle)$.*
3. *Soit π la projection orthogonale de $\mathbf{R}_n[X]$ sur $\mathbf{R}_1[X]$. Calculer les coefficients de $\pi(P)$, pour tout $P \in \mathbf{R}_n[X]$.*

`polynomesLagrangeOrthogonalite`

Exercice 3 ★☆☆ — *Dans cet exercice, E désigne un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, pas nécessairement de dimension finie, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot , \cdot \rangle$. On note $|| \cdot ||$ la norme associée à ce produit scalaire, définie par $||\,x\,|| = \langle x , x \rangle^{1/2}$ pour tout $x \in E$. Soit F un sous-espace vectoriel différent de $\{0\}$ et de dimension finie de E.*

1. *Donner la définition de la projection orthogonale π_F sur F.*
2. *On fixe $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de F, et x un vecteur de E. Montrer que $\pi_F(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle x , e_i \rangle\, e_i$.*
3. *Montrer enfin que $\|x - \pi_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle x , e_i \rangle^2$.*

`projectionOrthogonaleCours`

Exercice 4 ★★☆ — *Soit $E = \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbf{R})$. On définit l'application $\langle \cdot , \cdot \rangle$ par :*

$$\langle \cdot , \cdot \rangle \left| \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (f,g) & \longmapsto & \langle f , g \rangle := \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\ \mathrm{d}t. \end{array} \right.$$

1. *Démontrer que l'application $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est bien définie.*
2. *Démontrer que l'application $\langle \cdot , \cdot \rangle$ défini un produit scalaire sur E.*
3. *Soit $n \in \mathbf{N}$. Démontrer qu'il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbf{R}[X]$ tel que, pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$. Le polynôme T_n est appelé n-ième polynôme de Tchebychev.*
4. *Démontrer que la famille $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est orthogonale.*
5. *Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons $F_n := \mathrm{Vect}\,(T_0, \dots, T_n)$. Déterminer la projection orthogonale d'une fonction $f \in E$ sur F_n.*

`polynomesTchebychevOrthogonalite`

Exercice 5 ★★☆ — *On considère le produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$ défini par :*

$$\forall (P,Q) \in \mathbf{R}[X]^2 \qquad \langle P , Q \rangle := \int_0^1 P(x)\,Q(x)\ \mathrm{d}x$$

Pour $n \in \mathbf{N}$, posons $L_n = (X^n(1-X)^n)^{(n)}$.

1. *Soit $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que L_n est de degré n et de coefficient dominant $\dfrac{(-1)^n(2n)!}{n!}$.*
2. *Soient $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $P(1) = P(0) = 0$ et $Q \in \mathbf{R}[X]$. Démontrer que $\langle P' , Q \rangle = -\langle P , Q' \rangle$.*
3. *Démontrer que L_n est orthogonal à $\mathbf{R}_{n-1}[X]$.*
4. *En déduire que $(L_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une base orthogonale de $\mathbf{R}[X]$.*

`polynomesLegendreOrthogonalite`

Exercice 6 ★★☆ — *Dans toute cette partie, on fixe un réel $\alpha > -1$, et on note E_α l'ensemble des fonctions continues $f\colon [0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 \; \mathrm{d}x$ est convergente.*

1. *Montrer que, pour tout $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, $|ab| \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$.*
2. *En déduire que, si f et g sont deux éléments de E_α, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)g(x) \; \mathrm{d}x$ est convergente.*
3. *En déduire que E_α est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0,+\infty[,\mathbf{R})$ des fonctions continues de $[0,+\infty[$ vers $\mathbf{R}$.*
4. *Montrer que toute fonction polynomiale sur $[0,+\infty[$ est élément de E_α.*

Pour tout entier naturel n, on définit les fonctions :

$$\varphi_n \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^{n+\alpha}e^{-x} \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \psi_n \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^{-\alpha}e^{x}\varphi_n^{(n)}(x) \end{array} \right.$$

où la notation $\varphi_n^{(n)}$ désigne la dérivée d'ordre n de φ_n (avec la convention $\varphi_0^{(0)} = \varphi_0$).

5. *Calculer ψ_0, ψ_1 et ψ_2.*
6. *Pour tout $n \in \mathbf{N}$, montrer que la fonction ψ_n est polynomiale. Préciser son degré et son coefficient dominant.*

Dans la suite, on identifie ψ_n à son nuique prolongement continu à $[0,+\infty[$, qui est une fonction polynomiale sur $[0,+\infty[$. Cela permet de considérer ψ_n comme un élement de E_α, ce qu'on fera désormais. Pour tout $(f,g) \in E_\alpha^2$, on pose :

$$\langle\, f \,,\, g \,\rangle = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)g(x) \; \mathrm{d}x$$

7. *Montrer que $\langle\, \cdot \,,\, \cdot \,\rangle$ est un produit scalaire sur E_α.*

Dans la suite, on note $||\cdot||_\alpha$ la norme associée à ce produit scalaire, définie par

$$||\,f\,||_\alpha = \left(\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 \; \mathrm{d}x \right)^{1/2} \qquad \text{pour tout } f \in E_\alpha$$

8. *Soit n un entier $\geqslant 1$. Pour tout entier $k \in [\![0, n-1]\!]$, établir que :*

   $$\varphi_n^{(k)}(x) \longrightarrow 0 \text{ quand } x \text{ tend vers 0 par valeurs strictement positives}$$

   et que :

   $$\varphi_n^{(k)}(x) = \mathrm{o}\left(e^{-x/2}\right) \text{ quand } x \longrightarrow +\infty$$

9. *Soit m et n deux entiers naturels. Montrer que*

   $$\langle\, \psi_m \,,\, \psi_n \,\rangle = (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x)\varphi_n(x)dx.$$

   En déduire que la famille $(\psi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle\, \cdot \,,\, \cdot \,\rangle$.
10. *Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $||\,\psi_n\,||_\alpha^2 = n!\,\Gamma(n+\alpha+1)$.*

`polynomesLaguerreOrthogonalite`

Exercice 7 ★★☆ — *Soit $(E, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien. Étant donnés un entier $n \in \mathbf{N}^*$ et n vecteurs $x_1, \ldots, x_n$, notons*

$$G(x_1,\ldots,x_n) := (\langle\, x_i \,,\, x_j \,\rangle)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$$

1. *Démontrer que $\det G(x_1,\ldots,x_n) \neq 0$ si et seulement si la famille $(x_1,\ldots,x_n)$ est libre.*
2. *Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension n. Soit $(e_1,\ldots,e_n)$ une base de F. Démontrer que pour tout $x \in E$*

   $$\mathrm{d}(x,F) = \sqrt{\frac{\det G(e_1,\ldots,e_n,x)}{\det G(e_1,\ldots,e_n)}}$$

`matricesGram`

Exercice 8 ★★☆ — *Soient $(E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur.*

1. *Quelle est la définition de l'assertion : « p est un projecteur orthogonal » ?*
2. *Démontrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si, pour tout $x \in E$, $||\, p(x)\, || \leqslant ||\, x\, ||$.*

`caracterisationProjecteursOrthogonaux`

Exercice 9 ★★★ — *Soient $(E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, $||\cdot||$ la norme sur E associée au produit scalaire $\langle \cdot , \cdot \rangle$, $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite orthonormale de vecteurs de E et $x \in E$.*

1. *Démontrer que :*

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \qquad \sum_{k=1}^{n} \langle e_k , x \rangle^2 \leqslant ||\, x\, ||^2 \qquad \textit{[inégalité de Bessel]}$$

2. *Justifier que la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} \langle x , e_n \rangle^2$ est convergente.*

On suppose de plus que la famille $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est totale, i.e. que $\mathrm{Vect}\left((e_n)_{n\in\mathbf{N}}\right)$ est une partie dense de E.

3. *Démontrer que la série vectorielle $\sum_{n\geqslant 0} \langle x , e_n \rangle\, e_n$ converge dans E et que $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x , e_n \rangle\, e_n$.*
4. *Démontrer que :*

$$||\, x\, ||^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle e_n , x \rangle^2 \qquad \textit{[formule de Parseval]}$$

`famillesTotalesInegaliteBesselFormuleParseval`

Exercice 10 ★★★ — *Soit un entier $n \geqslant 1$. On munit $\mathcal{R}^n$ de son produit scalaire usuel et on note*

$$\mathbf{O}_n(\mathbf{R}) = \left\{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \ :\ A\, A^\top = I_n \right\}$$

le groupe orthogonal.

1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Démontrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes.*
   - *(i)* $A \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$
   - *(ii) Il existe deux bases orthonormées $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de $\mathbf{R}^n$ telles que $A = P_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$ (matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$).*
2. *Démontrer que $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.*
3. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice trigonalisable sur $\mathbf{R}$. Démontrer que :*

$$\exists\, (P, T) \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{T}_n^+(\mathbf{R}) \qquad A = P\, T\, P^\top$$

4. *Démontrer que $\mathcal{T}_n'(\mathbf{R}) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \ :\ A$ est trigonalisable sur $\mathbf{R}\}$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.*
5. *Démontrer que l'adhérence de $\mathcal{D}_n'(\mathbf{R}) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \ :\ A$ est diagonalisable sur $\mathbf{R}\}$ égale $\mathcal{T}_n'(\mathbf{R})$.*

`caractereFermeEnsembleMatricesTrigonalisablesR`

Exercice 11 ★★★ — *Calculer :*

$$\inf \left\{ \int_0^1 t^2\, (\ln(t) - a\, t - b)^2\ \mathrm{d}t \ :\ (a, b) \in \mathbf{R}^2 \right\}$$

`distanceEspaceFonctions`

Exercice 12 ★★★ — *Soient un entier $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Démontrer que $\mathrm{rg}\left(A^\top A\right) = \mathrm{rg}\,(A)$.*

`rangMatriceFoisTransoposeeMatrice`
