Exercice 4 $(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Calculons le polynôme caractéristique :

$$\det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & 3 \\ 0 & \lambda+1 & -2 \\ -2 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 3\lambda+1 \\ -2 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} \quad C_3 \leftarrow C_3 + 3C_2$$

$$= (-1)^{1+2} \times (-1) \begin{vmatrix} 0 & 3\lambda+1 \\ -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} \quad \text{dvp / 2}^{e} \text{ colonne}$$

$$+ (-1)^{2+2} (\lambda+1) \begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 \\ -2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(3\lambda+1) + (\lambda+1)(\lambda-3)(\lambda+1)$$

$$\left(= (\lambda+1)^2(\lambda-3) + 2(3\lambda+1) \right)$$

$$= 6\lambda + 2 + (\lambda^2 + \lambda - 3\lambda - 3)(\lambda+1)$$

$$= 6\lambda + 2 + (\lambda^2 - 2\lambda - 3)(\lambda+1)$$

$$= 6\lambda + 2 + \lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda^2 - 2\lambda - 3\lambda - 3$$

$$= \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1$$

1 racine évidente : $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$

$\boxed{\text{Or } \lambda^2 + 1 \text{ n'a pas de racine dans } \mathbb{R}\text{, donc non scindé dans } \mathbb{R}. \text{ Il vient } A \text{ non-diag dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

Dans $\mathbb{C}$: $\lambda^2 + 1 = (\lambda + i)(\lambda - i)$

Donc $\det(\lambda I_n - A) = (\lambda - 1)(\lambda - i)(\lambda + i)$ dans $\mathbb{C}$, d'où dans $\mathbb{C}$ $\chi_A = (X - 1)(X - i)(X + i)$.

$\boxed{\text{D'où } Spec_{\mathbb{C}}(A) = \{1 ; i ; -i\},\ |Spec_{\mathbb{C}}(A)| = 3 \text{ donc } A \text{ est inversible dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{C})}$

2) $\left(A \text{ et } B \text{ semblables} \;\middle|\; \begin{array}{l} \Rightarrow \chi_A = \chi_B \\ \Rightarrow Spec_{\mathbb{R}}(A) = Spec_{\mathbb{R}}(B) \end{array} \right)$

Inutile car pas d'équivalences

Soit $B_0 = \mathcal{C}an_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ et φ_A l'endo can. ass. à A.

$$Mat_{B_0}(\varphi_A) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \varphi_A(e_1) & \varphi_A(e_2) & \varphi_A(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} /e_1 \\ /e_2 \\ /e_3 \end{array}$$

On cherche $B = (f_1, f_2, f_3)$ base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tq

$$Mat_B(\varphi_A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} /f_1 \\ /f_2 \\ /f_3 \end{array}$$

f_3 nécessairement $\vec{vp}$ pour la vp 1.

$\varphi_A(f_1) = f_2$ $\qquad \varphi_A^2(f_1) = -f_1$, d'où $f_1 \in \mathrm{Ker}(\varphi_A^2 + Id)$.

$\varphi_A(f_2) = -f_1$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où $\varphi_A^2 \left| \begin{array}{l} M_{3,1}(\mathbb{R}) \to M_{3,1}(\mathbb{R}) \\ X \mapsto A^2 X \end{array} \right.$

D'où $\varphi_A^2 + Id \left| \begin{array}{l} M_{3,1}(\mathbb{R}) \to M_{3,1}(\mathbb{R}) \\ X \mapsto A^2 X + X \end{array} \right.$

$\mathrm{Ker}(\varphi_A^2 + Id)$?

Soit $X \in \mathrm{Ker}(\varphi_A^2 + Id)$, avec $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Alors $A^2 X = -X \iff \begin{pmatrix} -a \\ -b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -2a \\ -2b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

D'où $\operatorname{Ker}(\varphi_A^2 + Id) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

Prenons $f_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, calculons $f_2 = \varphi_A(f_1) = \begin{pmatrix}-3\\2\\-1\end{pmatrix}$

$f_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix}-3\\2\\-1\end{pmatrix}$, $f_3 = \varphi_A(f_3)$

$f_3 = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ avec $a,b,c \in \mathbb{R}$. Résolvons

$$f_3 = \varphi_A(f_3) \iff \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3a+b-3c\\-b+2c\\2a-c\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases}2a+b-3c=0\\-2b+2c=0\\2a-2c=0\end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\iff} \begin{cases}2a+b-3c=0\\-2b+2c=0\\-b+c=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}a = b\\b=c\\b=c\end{cases}$$ D'où $f_3 = \begin{pmatrix}a\\a\\a\end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

prenons $f_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$\text{Il vient la famille } \left(\overset{f_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \overset{f_2}{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}, \overset{f_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \right) = B$$

Mq elle est libre. Soit $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tq $\lambda f_1 + \mu f_2 + \nu f_3 = 0$

Résolvons :
$$\begin{cases} -3\mu + \nu = 0 \\ 2\mu + \nu = 0 \\ \lambda - \mu + \nu = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda - \mu + \nu = 0 \\ 2\mu + \nu = 0 \\ -3\mu + \nu = 0 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda - \mu + \nu = 0 \\ 2\mu + \nu = 0 \\ 5\nu = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow 2L_3 + 3L_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \\ \nu = 0 \end{cases}$$

Finalement, $A = \mathrm{Mat}_{B_0}(\varphi_A)$ et $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_B(\varphi_A)$

avec $B = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Par th. de chgt de base, les matrices sont semblables

Exercice 6 $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\varphi \,\Big|\, \begin{array}{l} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M \longmapsto AM - MA \end{array}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Résolvons (E_λ) $\varphi(X) = \lambda X$ avec $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ comme inconnue.

$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\varphi(X) = \lambda X \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 2b \\ c & 2d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = \lambda a \\ -b = \lambda b \\ c = \lambda c \\ 0 = \lambda d \end{cases} \quad (*) \Rightarrow$$

Si $\lambda \neq 0$, $\quad (*) \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b(\lambda+1) = 0 \\ c(\lambda - 1) = 0 \\ d = 0 \end{cases}$

Si $\lambda = 0$

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

D'où 0 vp et ~~$E_0(\varphi) = \mathrm{Vect}$~~

$E_0(\varphi) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$

Si $\lambda \neq 0$

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ (\lambda+1)b = 0 \\ (\lambda-1)c = 0 \\ d = 0 \end{cases} \quad (**)$$

Si $\lambda = 1$

$$(**) \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ 0 = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

D'où 1 vp et

$E_1(\varphi) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$

Si $\lambda = -1$

$$(**) \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 0 = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

D'où -1 vp et

$E_{-1}(\varphi) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$

On sait que les sous-espace propre sont en $\oplus$ et $\dim(E_0(\varphi) \oplus E_1(\varphi) \oplus E_{-1}(\varphi)$
$= \dim(E_0(\varphi)) + \dim(E_1(\varphi)) + \dim(E_{-1}(\varphi)) = 4 = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$

Donc il n'y a pas d'autres éléments propres

Si $\cancel{\lambda} \lambda \notin \{0; 1; -1\}$

$(**) \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \\ d=0 \end{cases}$ donc λ n'est pas vp de φ.

Finalement,

- 0 vp et $E_0(\varphi) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$
- 1 vp et $E_1(\varphi) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)$
- -1 vp et $E_{-1}(\varphi) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)$

(φ est donc diag)

Exercice 18

1) Montrons que g est linéaire. Soit $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_n[X]$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$g(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = n^2 X(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) - (X^2+X)(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)' - X^3(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)''$$

$$= \lambda_1 n^2 X P_1 + \lambda_2 n^2 X P_2 - (X^2+X)\lambda_1 P_1' - (X^2+X)\lambda_2 P_2' - X^3 \lambda_1 P_1'' - X^3 \lambda_2 P_2''$$

$$= \lambda_1 \left(n^2 X P_1 - (X^2+X) P_1' - X^3 P_1''\right) + \lambda_2 \left(n^2 X P_2 - (X^2+X) P_2' - X^3 P_2''\right) \boxed{= \lambda_1 g(P_1) + \lambda_2 g(P_2)}$$

$\boxed{\text{g est donc linéaire et a comme but sa source, il s'agit donc d'un endomorphisme.}}$

2) $\left(\mathrm{Ker}(g-\lambda \mathrm{Id})\ ?\right)$ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $P \in \mathrm{Ker}(g-\lambda \mathrm{Id})$.

Déterminons les élts propres de g (si $0 \in \mathrm{Spec}(g)$, ~~g sera inj~~ g ne sera pas inj)

$$P \in \mathrm{Ker}(g-\lambda \mathrm{Id}) \iff g(P) = \lambda P$$
$$\iff n^2XP - (X^2+X)P' - X^3P'' = \lambda P$$
$$\iff -X^3P'' - (X^2+X)P' + (n^2X+\lambda)P = 0 \quad (*)$$

Dès maintenant on remarque ~~par~~ que pour $\lambda = 0$, $(*)$ devient

$$-X^3P'' - (X^2+X)P' + n^2XP = 0$$

1) Montrons que $\mathrm{Im}(g) \subset \mathbb{R}_n[X]$.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. $\quad P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

Alors $g(P) = n^2XP - (X^2+X)P' - X^3P''$
$$= n^2XP - X^2P' + XP' - X^3P''$$

$n \geq d$

Si $\deg(P) \geq 2$, $\quad P \neq 0,\ P' \neq 0,\ P'' \neq 0$

$\deg(XP) = d+1$, $\deg(X^2P') = d+1$, $\deg(X^3P'') = d+1$, $\deg(XP') = d$

et $[n^2XP]_{n+1} = n^2a_n$, $[X^2P']_{n+1} = na_n$, $[X^3P'']_{n+1} = n(n-1)a_n = (n^2-n)a_n$

D'où $[g(P)]_{n+1} = n^2a_n - na_n - n^2a_n + na_n = 0$.

D'où $\deg(g(P)) \leq d \leq n$, il vient $g(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Si $\deg(P)=1$: $P\neq 0$, $P'\neq 0$, $P''=0$.

~~On trouve $[g(P)]_{n+1} = \frac{n^2}{1} a_n - \frac{1}{1} a_n = 0$~~

$\deg(g(P)) \leq 2 \leq n$

Si $\deg(P)=0$, $P\neq 0$, $P'=0$, $P''=0$

$\deg(g(P)) = 1 \leq n$

$\boxed{\text{D'où } \mathrm{Im}(g) \subset \mathbb{R}_n[X]}$

$\boxed{\text{g est linéaire et a pour but sa source, il s'agit donc d'un endomorphisme}}$

2) Injectivité : Soit $P \in \mathrm{Ker}(g)$. $P = \sum_{k=0}^{n} a_n X^n$ avec $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$

(X) Résolvons $P \in \mathrm{Ker}(g) \Leftrightarrow g(P)=0 \Leftrightarrow n^2 XP - (X^2+X)P' - X^3 P'' = 0$

Soit $B_0 = (1, X, \ldots, X^n)$ base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

$g(1) = n^2 X$

$g(X) = n^2 X^2 - X^2 - X = (n^2-1)X^2 - X$

$g(X^2) = n^2 X^3 - 2X^3 - 2X^2 = (n^2-4)X^3 - 2X^2$

$g(X^3) = n^2 X^4 - 3X^4 - 3X^3 - 6X^4 = (n^2-9)X^4 - 3X^3$

$g(X^4) = n^2X^5 - 4X^5 - 4X^4 - 12X^5 = (n^2-16)X^5 - 4X^4$

$\cancel{g(X^n) = (n^2-n^2)X^{n+1} - nX^n}$

$$A = Mat_B(g) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} g(1) & g(X) & g(X^2) & \cdots & g(X^n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ n^2-1 & & & & \\ & (n^2-1)-2 & & & \\ & & (n^2-2^2) & \ddots & \\ 0 & & & 0 & -n \end{pmatrix} & \begin{array}{c} /1 \\ /X \\ /X^2 \\ /X^3 \\ \vdots \\ /X^n \end{array} \end{array}$$

Triangulaire inférieur avec comme diag $0, -1, \dots, -n$.

D'où $\chi_A = \prod_{i=1}^{n+1}(X - [A]_{i,i}) = \prod_{i=0}^{n}(X+i)$ (*)

$Spec_{\mathbb{R}}(A) = Spec(g) = [\![0; n]\!]$

$$g(X^n) = n^2X^{n+1} - (X^2+X)nX^{n-1} - X^3n(n-1)X^{n-2}$$
$$= X^{n+1}(n^2-n-n^2+n) + X^n(-n) = -nX^n$$

D'après (*), 0 est vp de g donc g n'est pas injective.
De plus, $|Spec(g)| = n+1 = \dim(\mathbb{R}_{n+1}[X])$
Donc g est diagonalisable.

Exercice 20 $\quad n \geq 2 \quad B_0 = \text{Can}_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$

$rg(M) = 1$, donc $\text{Ker}(M) = n-1 \to$ hyperplan ?

0 vp de M et $\text{Ker}(M) = E_0(M)$.

D'où $\dim(E_0(M)) = n-1$.

On a donc $\chi_M = X^{n-1}(X - \text{tr}(M))$ (sachant que $[\chi_M]_{n-1} = -\text{tr}(M)$)

Soit φ_M l'application linéaire can. associée à M.

$\text{Mat}_{B_0}(\varphi_M) = M \quad \dim(\text{Ker}(\varphi_M)) = n-1$. Soit $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de $\text{Ker}(\varphi_M)$.

On complète $(e_1, \dots, e_{n-1})$ en une base $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$.

On a $\text{Mat}_{\underline{e}}(\varphi_M) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \varphi_M(e_1) & \cdots & \varphi_M(e_{n-1}) & \varphi(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} /e_1 \\ /e_2 \\ \\ /e_n \end{array} = A$

(thm chgt base :) semblable à M. D'où $\text{tr}(M) = \text{tr}(A)$ et M ~~avec~~ diagonalisable ssi A diagonalisable.

$$\chi_M = \chi_A = X^{n-1}(X - \text{tr}(A)) = X^{n-1}(X - \text{tr}(M))$$

$\dim(E_0(\varphi_M)) = n-1 \quad \cancel{\dim(E_{\text{tr}(M)}(\varphi_M)) =}$

Si $\text{tr}(M) = 0$, $\chi_M = X^n \to$ pas diag

Sinon, $1 \leq \underbrace{\dim(E_{\text{tr}(M)}(g))}_{=1} \leq 1$ (multiplicité de $\text{tr}(M)$)

D'où $\dim(E) = \dim(E_0(g)) + \dim(E_{\text{tr}(M)}(g))$