TD – Réduction des endomorphismes et des matrices 1

Notation. — La lettre $\mathbf{K}$ désigne un corps (commutatif) infini.

1. Exercices d'application du cours

Exercice 1. — *Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables sur* $\mathbf{R}$ *? Si oui, les diagonaliser.*

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. — *À quelle condition sur* $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ *la matrice* $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ *est-elle diagonalisable sur* $\mathbf{R}$ *? La diagonaliser lorsque c'est le cas.*

Exercice 3. — *Démontrer que les matrices suivantes sont diagonalisables dans* $M_3(\mathbf{C})$ *et les diagonaliser.*

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. — *Soit* $A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. *Démontrer que la matrice* A *est diagonalisable dans* $\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$*, mais pas dans* $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.
2. *Démontrer que la matrice* A *est semblable dans* $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ *à la matrice* $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. — *Soit* E *un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel* ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$) *de dimension finie. Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$ *un endomorphisme de rang 1.*

1. *Démontrer qu'il existe un scalaire* $\lambda \in \mathbf{K}$ *tel que* $u^2 = \lambda u$.
2. *Démontrer que* λ *est une valeur propre de* u.

Exercice 6. — *Notons* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. *Déterminer les éléments propres de :*

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \\ M & \longmapsto & AM - MA \end{array} \right.$$

Exercice 7. — *Soit* $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. *Posons :*

$$||\, A \,|| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$$

Démontrer que $\mathrm{Spec}_{\mathbf{R}}(A) \subset [-\,||\, A \,||\,, ||\, A \,||]$.

Exercice 8. — *Soit* E *un* $\mathbf{C}$*-espace vectoriel de dimension finie.*

1. *Démontrer que tout endomorphisme de* E *a au-moins une valeur propre.*
2. *Est-ce vrai si* E *n'est pas de dimension finie ? On pourra considérer l'endomorphisme* φ *de* $\mathbf{C}[X]$ *défini par, pour tout* $P \in \mathbf{C}[X]$, $\varphi(P) = (X - 1)P(X)$.

Exercice 9 (CCINP). — *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. *Démontrer que* $\lambda = 2$ *est valeur propre de* A *et que* $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *est un vecteur propre associé.*
2. *Vérifier que* A *possède deux autres valeurs propres* -2 *et* 4 *avec comme vecteurs propres respectivement associés* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. *On considère les suites* $(a_n)_{n \in n\mathbf{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *et* $(c_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *définies par leurs premiers termes* a_0, b_0, c_0 *et les relations de récurrence :*
$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad \begin{cases} a_{n+1} = -2b_n + 2c_n \\ b_{n+1} = -3a_n + b_n + 3c_n \\ c_{n+1} = -a_n + b_n + 3c_n \end{cases}$$
On suppose que $a_0 = 2$, $b_0 = 2$ *et* $c_0 = 0$. *Exprimer, pour tout* $n \in \mathbf{N}$, *les nombres réels* a_n, b_n *et* c_n *en fonction de* n.

Exercice 10 (CCINP). —

1. *Soit* E *un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* n, *soit* $u \in \mathcal{L}(E)$. *Rappeler la définition d'une valeur propre et démontrer que, pour tout* $\lambda \in \mathbf{K}$ *:*
$$\lambda \in \mathit{Spec}(u) \iff \det(u - \lambda\, \mathrm{id}_E) = 0$$
En déduire que u *possède au plus* n *valeurs propres distinctes.*
2. *Trouver un endomorphisme de* $\mathbf{R}^2$ *ayant* 0 *et* 1 *comme valeurs propres.*

Exercice 11 (CCINP). — *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, *où* a *est un réel.*

1. *Quel est le rang de* A *? La matrice* A *est-elle inversible ?*
2. *La matrice* A *est-elle diagonalisable ?*

Exercice 12 (CCINP). — *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer les valeurs propres de* A, *puis une base de vecteurs propres associés.*
2. *Déterminer la matrice de passage* P *de la base canonique vers la base de vecteurs, puis son inverse* P^{-1}.
3. *On considère le système différentiel* $\begin{cases} x' = x + y - z \\ y' = 2y + z \\ z' = 3z \end{cases}$. *Résoudre ce système en utilisant la question 1.*

Exercice 13 (CCINP). — *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ *(avec* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$*). Posons :*
$$\Phi_A \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array} \right.$$

1. *Déterminer les valeurs propres de* Φ_A *en fonction des valeurs propres de* A.
2. *Déterminer les sous-espaces propres de* Φ_A *en fonction des sous-espaces propres de* A.

Exercice 14 (CCINP). — *Soit* $n \in \mathbf{N}^*$. *Notons* U *la matrice de* $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ *dont tous les coefficients valent* 1.

1. *Quel est le rang de* U *? Démontrer que* 0 *est valeur propre de multiplicité au-moins* $n-1$.
2. *Démontrer que* n *est valeur propre de* U, *et trouver le sous-espace propre correspondant. Quel est le polynôme caractéristique de* U *?*
3. *Diagonaliser* U *(on pourra commencer par trouver une base du noyau de* U*).*
4. *Retrouver le polynôme caractéristique de* U *par un calcul direct de déterminant.*

Exercice 15 (CCINP). — *Notons u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. *Trouver toutes les droites de $\mathbf{R}^3$ stables par u.*

Exercice 16 (CCINP). — *On rappelle que $j := e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Posons* $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$, *notons u l'endomorphisme de $\mathbf{C}^3$ canoniquement associé à A.*

1. *Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{C}^3$ stables par u.*
2. *Déterminer le commutant de A (l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$ qui commutent avec A).*

Exercice 17 (CCINP). —

1. *Démontrer que deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.*
2. *Deux matrices ayant le même polynôme caractéristique sont-elles semblables ?*

Exercice 18 (CCINP). — *Soit $n \geqslant 2$, posons :*

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & n^2 \cdot X\,P - (X^2+X)\,P' - X^3\,P'' \end{array} \right.$$

1. *Démontrer que g est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$.*
2. *L'endomorphisme g est-il injectif ? diagonalisable ?*

Exercice 19 (CCINP). — *Pour tout $z \in \mathbf{C}$, posons* $A(z) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. *Démontrer que $A(z)$ est diagonalisable, sauf pour une valeur particulière de z que l'on précisera.*
2. *Soit $\theta \in \mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Z}$. Démontrer qu'il existe un unique complexe z, noté $z(\theta)$, tel que $e^{i\theta}$ soit valeur propre de $A(z)$.*

Exercice 20 (CCINP). — *Soit un entier $n \geqslant 2$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice de rang 1. Démontrer que la matrice M est diagonalisable sur $\mathbf{K}$ si et seulement si sa trace est non nulle.*

Exercice 21 (CCINP). — *Soit $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$. Étudier la diagonalisabilité de la matrice* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & c^2 \\ 0 & b^2 & 0 \\ a^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *sur $\mathbf{R}$.*

Exercice 22 (CCINP). — *Soit $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in M_n(\mathbf{C})$ telle que $m_{i,i-1} = 1$ pour tout $i \in [\![2,n]\!]$, $m_{1,n} = 1$, les autres coefficients étant nuls.*

1. *Démontrer que M est diagonalisable et que ses valeurs propres sont racines n-ièmes de l'unité.*
2. *Soient $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbf{C}$ et $A = a_0 I_n + a_1 M + \ldots + a_{n-1} M^{n-1}$. Démontrer que :*

$$\det(A) = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \left(a_0 + a_1\omega + \ldots + a_{n-1}\omega^{n-1}\right).$$

Exercice 23 (CCINP). — *Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ telles que* $M^3 - 2M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 24 (CCINP). — *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{tr}(A) = 1$. Démontrer que $A^2 = A$.*

Exercice 25 (CCINP). — *Déterminer toutes les matrices commutant avec* $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$, *où $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$.*

Exercice 26 (TPE). — *Discuter de la diagonalisabilité et de la trigonalisabilité en fonction du réel a de la matrice*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -a & a \end{pmatrix}$$

Exercice 27 (TPE). — *Pour tout entier $n \geqslant 2$, déterminer les valeurs propres de la matrice de format (n,n), dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux des dernières lignes et colonnes qui valent 1.*

Exercice 28 (TPE). — *Posons :*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}[X] \\ P & \longmapsto & (X^3+X)\,P' - (3X^2-1)\,P \end{array} \right.$$

Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$ et déterminer ses éléments propres.

Exercice 29 (ENSAM). — *Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbf{R}^3\right)$. Notons A sa matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.*

1. *Démontrer qu'une droite engendrée par un vecteur u non nul est stable par f si et seulement si u est un vecteur propre de f.*
2. *Soit $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Démontrer que le plan d'équation $ax+by+cz=0$ est stable par f si et seulement si le vecteur $(a,b,c)^\top$ est un vecteur propre de $A^\top$.*
3. *Démontrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes.*
   - (a) *f admet une unique droite stable.*
   - (b) *f admet un unique plan stable.*
   - (c) *Le polynôme caractéristique de f admet une unique racine réelle de multiplicité 1 ou 3 et l'espace propre correspondant est une droite.*
4. *Déterminer les sous-espaces stables de f quand $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.*

---

2. Exercices de la banque CCINP

Exercice 30 (Banque CCINP n°67). — *Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$, où $a,b,c \in \mathbf{R}$.*

1. *M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$?*
2. *M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$?*

Exercice 31 (Banque CCINP n°69). — *On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel.*

1. *Déterminer le rang de A.*
2. *Pour quelles valeurs de a, la matrice A est-elle diagonalisable ?*

Exercice 32 (Banque CCINP n°72). — *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, soit $f \in \mathcal{L}(E)$, soit $(e_1,\ldots,e_n)$ une base de E. On suppose que $f(e_1) = \ldots = f(e_n) = v$, où v est un vecteur donné de E.*

1. *Donner le rang de f.*
2. *L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?*

Exercice 33 (Banque CCINP n°73). —

1. *Posons $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.*

2. *Déterminer les matrices qui commutent avec la matrice* $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. *En déduire l'ensemble des matrices qui commutent avec* A *est* $\mathrm{Vect}\,(I_2, A)$.

Exercice 34 (Banque CCINP n°74). — *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) *Justifier sans calcul que* A *est diagonalisable.*
   (b) *Déterminer les valeurs propres de* A *puis une base de vecteurs propres associés.*
2. *On considère le système différentiel* $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$, x, y, z *désignant trois fonctions de la variable* t, *dérivables sur* $\mathbf{R}$. *En utilisant la question 1. et en le justifiant, résoudre ce système.*

Exercice 35 (Banque CCINP n°75). — *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. *Démontrer que* A *n'est pas diagonalisable.*
2. *On note* f *l'endomorphisme de* $\mathbf{R}^2$ *canoniquement associé à* A. *Trouver une base* (v_1, v_2) *de* $\mathbf{R}^2$ *dans laquelle la matrice de* f *est de la forme* $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$. *On donnera explicitement les valeurs de* a, b *et* c.
3. *En déduire la résolution du système différentiel* $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

Exercice 36 (Banque CCINP n°83). — *Soient* u *et* v *deux endomorphismes d'un* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel* E.

1. *Soit* λ *un réel non nul. Prouver que si* λ *est valeur propre de* $u \circ v$, *alors* λ *est valeur propre de* $v \circ u$.
2. *On considère, sur* $E = \mathbf{R}[X]$ *les endomorphismes* u *et* v *définis par :*

$$u\colon P \longmapsto \int_1^X P \qquad \text{et} \qquad v\colon P \longmapsto P'$$

   Déterminer $\mathrm{Ker}(u \circ v)$ *et* $\mathrm{Ker}(v \circ u)$. *Le résultat de la question 1. reste-t-il vrai pour* $\lambda = 0$ *?*
3. *Si* E *est de dimension finie, démontrer que le résultat de la première question reste vrai pour* $\lambda = 0$. *On pourra penser à utiliser le déterminant.*

---

3. Exercices de difficulté moyenne

Exercice 37. — *Soit un entier* $n \geqslant 2$.

1. *Démontrer que si* n *est impair alors toute matrice* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ *possède une valeur propre réelle.*
2. *On suppose* n *est pair. Donner un exemple de matrice de* $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ *ne possédant aucune valeur propre réelle.*

Exercice 38. — *Soit* E *un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* n. *Soient* $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ *tels que* $u \circ v = v \circ u$ *et* v *soit nilpotent. Cet exercice a pour but de montrer que* $\det(u + v) = \det(u)$.

1. *Établir le résultat voulu lorsque* $n = 1$.
2. *Donner l'allure de la matrice de* u, v *et* $u + v$ *dans une base adaptée à* $\mathrm{Im}(v)$.
3. *Conclure par récurrence sur la dimension de l'espace.*

Exercice 39. — *Soit* E *un* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel de dimension finie* $n \geqslant 2$. *Cet exercice a pour but de montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel de* E *stable par* u *de dimension 1 ou 2.*

1. *Que dire si* u *possède une valeur propre ? On supposera désormais que ce n'est pas le cas.*
2. *Notons* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ *la matrice de* u *dans une base* $\mathcal{B}$ *de* E. *Démontrer qu'il existe un complexe* λ *et un vecteur colonne à coefficients complexes* Z *tels que* $MZ = \lambda Z$.

3. *Écrivons $\lambda = \alpha + i\beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ et $Z = X + iY$, où X et Y sont des vecteurs colonnes à coefficients réels. Calculer MX et MY en fonction de α, β, X et Y.*
4. *Conclure.*

Exercice 40. — *Dans cet exercice, $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.*

1. *Soit T une matrice triangulaire supérieure à coefficients dans $\mathbf{K}$, soit $\varepsilon > 0$. Démontrer qu'il existe des réels $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in]0, \varepsilon[$ tels que la matrice :*
$$T + \mathit{Diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$$
soit diagonalisable.
2. *Étant donnée une matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, posons :*
$$||\, M \,|| = \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |m_{i,j}|$$
Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$ et toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ trigonalisable, il existe une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ diagonalisable telle que $||\, M - N \,|| \leqslant \varepsilon$.
3. *Démontrer que, pour tout matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une matrice diagonalisable $N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $||\, M - N \,|| \leqslant \varepsilon$.*
4. *Soit P un polynôme de $\mathbf{R}[X]$, unitaire et de degré n. Démontrer que le polynôme P est scindé sur $\mathbf{R}$ si et seulement si :*
$$\forall\, z \in \mathbf{C} \quad |P(z)| \geqslant |\mathrm{Im}\,(z)|^n$$
5. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Supposons donnée une suite $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ diagonalisables sur $\mathbf{R}$ telle que :*
$$||\, M - A_n \,|| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$
Démontrer que M est trigonalisable sur $\mathbf{R}$.

Exercice 41. — *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.*

1. *Démontrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :*
$$\forall \lambda \in \mathbf{C} \quad 0 < |\lambda| < \varepsilon \Longrightarrow \det(A - \lambda I_n) \neq 0$$
2. *Pour toute matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, posons :*
$$||\, M \,|| = \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |m_{i,j}|$$
Démontrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, il existe une suite $(M_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de matrices inversibles telle que :
$$||\, M - M_n \,|| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Exercice 42. — *Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Supposons que u est irréductible ($\{0_E\}$ et E sont les seuls sous-espaces stables par u).*

1. *Démontrer que pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, la famille $\mathcal{B}_x := \left(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)\right)$ est une base de E.*
2. *Démontrer que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_x$ de E ne dépend pas de x.*

Exercice 43. — *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $\mathrm{tr}\,(A) \neq 0$. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme :*
$$\Phi \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ M & \longmapsto & \mathrm{tr}\,(A)\ M - \mathrm{tr}\,(M)\ A \end{array} \right.$$

Exercice 44. — *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tels que $u \circ v - v \circ u = u$.*

1. *Démontrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $u^k \circ v - v \circ u^k = k\, u^k$.*
2. *En déduire que u est nilpotent.*

Exercice 45 (Centrale). — *Soit un entier $n \geqslant 2$.*

1. *Calculer le polynôme caractéristique de la matrice :*

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

où $a_0, \dots, a_{n-1}$ sont des nombres complexes.

2. *Soit $P = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$ un polynôme de degré n, unitaire, de racines $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{C}$. Supposons que $P \in \mathbf{Z}[X]$. Démontrer que, pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, le polynôme $\prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k^p)$ est à coefficients entiers.*

Exercice 46 (Mines-Ponts). —

1. *Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. Calculer $A^2 - \mathrm{tr}\,(A)\ A + \det(A)\, I_2$.*
2. *Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ semblables à leur carrés.*

Exercice 47 (Mines-Ponts). — *Soient un entier $n \geqslant 2$ et une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Démontrer que A est nilpotente si et seulement si :*

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}\left(A^2\right) = \ldots = \mathrm{tr}\left(A^n\right) = 0$$

Exercice 48 (Mines-Ponts). — *Posons $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ telle que :*

$$\forall\, (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 a_{i,j} = \begin{cases} j & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Calculer $\chi_A(-k)$, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.

---

4. Exercices difficiles

Exercice 49 (X). — *Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, posons $R_i := \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$.*

1. *On suppose que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $|a_{i,i}| > R_i$. Démontrer que A est inversible.*
2. *Démontrer que $\mathrm{Spec}_{\mathbf{C}}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \{z \in \mathbf{C} \ :\ |z - a_{i,i}| \leqslant R_i\}$.*
3. *On suppose à nouveau que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $|a_{i,i}| > R_i$. Démontrer que :*

$$|\det(A)| \geqslant \prod_{i=1}^{n} (|a_{i,i}| - R_i)$$

4. *On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,i} > R_i$. Démontrer que :*

$$\det(A) \geqslant \prod_{i=1}^{n} (|a_{i,i}| - R_i)$$

Exercice 50 (ÉNS). — *Notons S l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ telles que :*

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad m_{i,j} \geqslant 0 \qquad \textit{et} \qquad \forall i \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1.$$

Les matrices de S sont appelées matrices stochastiques. Soit $M \in S$, soit $\lambda \in \mathbf{C}$ une valeur propre complexe de A, soit $X = (x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ un vecteur propre associé.

1. *Démontrer que $|\lambda| \leqslant 1$.*
2. *Démontrer que 1 est valeur propre de M.*
3. *Supposons λ de module 1. Soit $i \in [\![1,n]\!]$ tel que :*

$$|x_i| = \max\{|x_j| \ : \ j \in [\![1,n]\!]\}$$

Démontrer qu'il existe $j \in [\![1,n]\!]$ tel que $x_j = \lambda\, x_i$. En déduire que λ est une racine m-ième de l'unité, avec $m \leqslant n$.

Exercice 51. — *Soient un entier $n \geqslant 1$ et un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n.*

1. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que u est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire dans E qui est stable par u.*
2. *Soient u un endomorphisme diagonalisable de E et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Démontrer que l'endomorphisme induit :*

$$u_F \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \right.$$

est diagonalisable.

3. *Soient un entier $p \geqslant 2$ et $u_1, \ldots, u_p$ des endomorphismes diagonalisables de E. Démontrer que les deux assertions sont équivalentes.*
   (a) *Les endomorphismes $u_1, \ldots, u_p$ commutent deux à deux.*
   (b) *Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_i)$ est diagonale.*
4. *Soient un entier $p \geqslant 2$ et $A_1, \ldots, A_p \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ des matrices diagonalisables sur $\mathbf{K}$. Démontrer que les deux assertions sont équivalentes.*
   (a) *Les matrices $A_1, \ldots, A_p$ commutent deux à deux.*
   (b) *Il existe une matrice $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{K})$ telle que, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, la matrice $P^{-1} A_i\, P$ est diagonale.*
