Exercice 10 : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$.

1) Supposons A^2 diagonalisable.
A est-elle nécessairement diagonalisable ?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{D}_2'(\mathbb{C})$$

A est nilpotente, donc 0 est sa ~~vrai~~ seule valeur propre.

Si A est de plus diagonalisable, alors $\pi_A = X$.
Donc $A = 0$.

2) On suppose A^2 diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et inversible.

A^2 diagonalisable, donc $\pi_{A^2} = \prod_{\lambda \in Spec_{\mathbb{C}}(A^2)} (X - \lambda)$.

On sait que $\pi_{A^2}(A^2) = 0$,
donc $(\pi_{A^2}(X^2))(A^2) = 0$: $(P := \pi_{A^2}(X^2))$

$$0 = \prod_{\lambda \in Spec_{\mathbb{C}}(A^2)} (A^2 - \lambda)$$

$$= \prod_{\lambda \in Spec_{\mathbb{C}}(A^2)} (A - \underbrace{\sqrt{|\lambda|}\, e^{i\frac{\arg(\lambda)}{2}}}_{=: r_\lambda})(A + \sqrt{|\lambda|}\, e^{i\frac{\arg(\lambda)}{2}})$$

$(\lambda \neq 0)$

$\forall \lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(A^2)$, $r_\lambda \neq -r_\lambda$ $(\lambda \neq 0)$.

~~Soit~~ Donc A est annulé par un polynôme scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$:
A est donc diagonalisable.

Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(A^2)$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

$$\pm r_{\lambda_1} = \pm r_{\lambda_2} \Rightarrow (\pm r_{\lambda_1})^2 = (\pm r_{\lambda_2})^2$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \quad ↯.$$

Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(A^2)$:

$$-r_\lambda = r_\lambda \Rightarrow 2r_\lambda = 0$$
$$\Rightarrow r_\lambda = \sqrt{|\lambda|} = 0$$
$$\Rightarrow \lambda = 0 \quad ↯.$$

Donc P est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, et P annule A.

Donc A est diagonalisable.

Exercice 4 : $A \in GL_5(\mathbb{R})$, $\left|\begin{array}{l} \mathrm{tr}(A) = 2, \\ \text{et } A^3 + A^2 - 2A = 0 \end{array}\right.$

En multipliant par A^{-1} :

$$A^3 + A^2 - 2A = 0 \Rightarrow A^2 + A - 2 = 0$$

donc $P = X^2 + X - 2$
$= (X-1)(X+2)$ annule A.

P est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, donc A est diagonalisable et :

$$\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(A) \subset \{1 ; -2\}.$$

$\exists\, p \in \mathbb{N},\ \chi_A = (X-1)^p (X+2)^{5-p}$
car χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$.

Or : $2 = \mathrm{tr}(A) = p - 2(5-p)$
donc $p = 4$.

Ainsi, $\chi_A = (X-1)^4 (X+5)$.

Exercice 12 : $u \in \mathcal{L}(E)$, $x \in E$,

1) On pose $\varphi_x \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & P(u)(x) \end{array} \right.$

Montrons que $\ker(\varphi_x)$ est un idéal :

φ_x est linéaire donc $\ker(\varphi_x)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{K}[X], +)$.

Caractère absorbant :

Soit $(Q, P) \in \mathbb{K}[X] \times \ker(\varphi_x)$,

$$\begin{aligned} \varphi_x(QP) &= QP(u)(x) \\ &= Q(u)\big(\underbrace{P(u)(x)}_{=0}\big) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $QP = PQ \in \ker(\varphi_x)$.

Donc $\ker(\varphi_x)$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ non-nul car $\mu \in \ker(\varphi_x)$.

$\exists ! \, Q_x \in \mathbb{K}[X]$, $\left| \begin{array}{l} Q_x \text{ est unitaire} \\ \text{et } \ker(\varphi_x) = Q_x \mathbb{K}[X]. \end{array} \right.$

Q_x est alors de degré minimal dans $\ker(\varphi_x) \setminus \{0\}$.