TD Correction

Exercice CCINP 93

1) Soit $x \in \text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u)$.

Donc, $\begin{cases} u(x) = 0_E \\ \exists\, \alpha \in E,\ u(\alpha) = x \end{cases}$

Or $u^3(\alpha) + u^2(\alpha) + u(\alpha) = 0_E$,

D'où $\underbrace{u^2(x)}_{=0_E} + \underbrace{u(x)}_{=0_E} + x = 0_E$

Donc $x = 0_E$, $\text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u) = \{0_E\}$ (1)

De plus, par le théorème du rang :

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(u)) + \dim(\text{Im}(u)) \quad (2)$$

Par (1) et (2), $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$.

2) a. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P \wedge Q = 1$.

$\text{Ker}((PQ)(u)) = \text{Ker}(P(u)) \oplus \text{Ker}(Q(u))$

b. • $P := X^3 + X^2 + X$ est un polynôme annulateur de u.
Donc $\text{Ker}(P(u)) = E$.

• $P = X(X^2 + X + 1)$ et $X \wedge X^2 + X + 1 = 1$ car X est irréductible unitaire et $X \nmid X^2 + X + 1$.

D'après le lemme des noyaux,

$$E = \mathrm{Ker}(P(u)) = \mathrm{Ker}(u^2 + u + Id_E) \oplus \mathrm{Ker}(u) \quad (*)$$

Soit $x \in \mathrm{Im}(u)$,
il existe $\beta \in E$ tel que $u(\beta) = x$.

$u^2(x) + u(x) + x = u^3(\beta) + u^2(\beta) + u(\beta) = 0_E$.
donc $x \in \mathrm{Ker}(u^2 + u + Id)$, donc $\mathrm{Im}(u) \in \mathrm{Ker}(u^2 + u + Id)$ (1)

D'après Q1, $\dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(u)) = \dim(\mathrm{Im}(u))$
D'après $(*)$, $\dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(u)) = \dim(\mathrm{Ker}(u^2 + u + Id_E))$ (2)

Par (1) et (2), $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u^2 + u + Id_E)$

3) u non bijectif $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(u - 0\,Id_E) \neq \{0_E\}$

$\Leftrightarrow 0_E \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(u)$

P est un polynome annulateur de u,
donc $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(u) \subset \{0\}$ car $X^2 + X + 1$ n'a pas de racines réelles $(X^2 + X + 1 = (X - j)(X - j^2))$

Donc $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(u) = \{0\}$

Exercice 1

$P = X^2+1$ annule A
$(X^2+1) = (X+i)(X-i)$

P annule A ~~est~~ est scindé en racines simples dans $\mathbb{C}$.
D'où A diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

De plus, P est à coefficients réels, d'où
$\text{mult}(i, P) = \text{mult}(-i, P)$

Par Grassmann, comme $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = E_i(M) \oplus E_{-i}(M)$
~~D'où~~, $n = \dim(E_i(M)) + \dim(E_{-i}(M))$
$= 2\dim(E_i(M))$
$\left(\text{car} \begin{cases} \text{mult}(i,P) = \dim(E_i(M)) \\ \text{mult}(-i,P) = \dim(E_{-i}(M)) \end{cases}\right)$

Autre solution:

$A^2 = -I_n \Rightarrow \underbrace{\det(A)^2}_{\geq 0} = (-1)^n \Rightarrow n$ pair.

Exercice 8

1) φ linéaire

2) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

$\varphi^2(u) = \varphi(\varphi(u)) = \varphi(u \circ v - v \circ u) = (u\circ v - v \circ u)\circ v - v\circ(u\circ v - v\circ u)$
$= u\circ \underbrace{v\circ v}_{id_E} - v\circ u\circ v - v\circ u\circ v + \underbrace{v\circ v}_{id_E}\circ u = 2(u - v\circ u\circ v)$

$$\varphi^3(u) = 2\varphi(u - v\circ u\circ v) = 2\left((u - v\circ u\circ v)\circ v - v\circ(u - v\circ u\circ v)\right)$$
$$= 2(u\circ v - v\circ u\circ v^2 - v\circ u + v^2\circ u\circ v)$$
$$= 4(u\circ v - v\circ u) = 4\varphi(u).$$

Donc $X^3 - 4X$ est un polynôme annulateur de φ.

3) $P = X^3 - 4X = X(X^2-4) = X(X-2)(X+2)$

P est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ et annule φ, donc φ est diagonalisable

$\left(\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(\varphi) \subset \{0;2;-2\}\right)$

Exercice 9

heuristique : $P = X^3 - 3X + 4 = \underset{\text{réel}}{(X-\lambda)}(X-z)(X-\bar{z})$

$$\chi_A = (X-\lambda)^a (X-z)^b (X-\bar{z})^b$$

$$\det(A) = \lambda^a |z|^{2b}$$

besoin de mq P a une unique racine réelle positive.

~~$f \mid \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 - 3x + 4$~~

x		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$-\infty$ ↗	>0	↘		↗ $+\infty$

~~$f(-\sqrt{3}) = \dots + 4$~~ ~~(Plus facile)~~