Ex 5 TD proba 2

- $X(\Omega) = \mathbb{N}_{\geq n} \cup \{+\infty\}$

- Loi de X ?

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la bactérie a été touché par le n-ième laser, et 0 sinon.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \sim B(p)$ et les X_n sont indépendants

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_n$.

S_n compte le nombre de succès d'une succession de n experience de bernoulli indépendantes de même loi, donc $S_n \sim B(n,p)$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
$\forall k \in [\![1, n]\!]$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(X = n) = (X_n = 1) \cap (S_{n-1} = n-1)$

$\rightarrow P(X=n) = P(X_n = 1) \times P(S_{n-1} = n-1)$ (Lemme des coalitions)

$$= p \times \binom{n-1}{n-1} p^{n-1} (1-p)^{n-1-(n-1)}$$

$$= \binom{n-1}{n-1} p^n (1-p)^{n-n}$$

$\rightarrow P(X = +\infty) = 1 - P(X \neq +\infty)$

$$= 1 - P(X \in \mathbb{N}_{\geq n})$$

$$= 1 - \sum_{m=n}^{+\infty} p^n (1-p)^{m-n} \binom{m-1}{n-1}$$

Donc $P(X=+\infty) = 1 - p^r \sum_{n=r}^{+\infty} (1-p)^{n-r} \frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!}$

$R(\sum x^n) = 1$ donc $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ est bien définie et de classe C^∞ sur $]-1;1[$. Par dérivation terme à terme, sur $]-R,R[$,

$\forall r \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]-1,1[, f^{(r-1)}(x) = \sum_{n=r-1}^{+\infty} \frac{n!\, x^{n-r+1}}{(n-r+1)!} = \sum_{n=r}^{+\infty} \frac{(n-1)!\, x^{n-r}}{(n-r)!}$

- $p \in]0,1[$ donc $(1-p) \in]-1,1[$,

donc $\sum_{n=r}^{+\infty} \frac{(n-1)!\,(1-p)^{n-r}}{(r-1)!\,(n-r)!} = \frac{1}{(r-1)!} f^{(r-1)}(1-p)$

$\forall x \in]-1,1[, \forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$

donc, $P(X=+\infty) = 1 - \frac{p^r\,(r-1)!}{(r-1)!\,p^r} = 0$

Espérance : $X \geq 0$, on peut donc considérer $E(X)$.

$E(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}_{\geq r}} n\, p^r (1-p)^{n-r} \binom{n-1}{r-1}$

Formule du capitaine : $n\binom{n-1}{r-1} = r\binom{n}{r}$.

$E(X) = \frac{r p^r}{r!} \underbrace{\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n!}{(n-r)!} (1-p)^{n-r}}_{\frac{r!}{p^{r+1}}}$, analogue à précédemment

$= \frac{r p^r}{r!} \frac{r!}{p^{r+1}} = \frac{r}{p}$.

Exercice 64 : $q \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

(E_q) : $y'' + q(t)y = 0$, $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$

1) a) Soit y solution de (E_q).
On suppose que y est bornée.

D'après le théorème fondamental de l'analyse :

$F \,\Big|\, \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \int_0^t y''(u)\,du \end{array}$ est l'unique primitive de y'' nulle en 0.

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $y'(t) = y'(0) + \int_0^t y''(u)\,du$

$= y'(0) + \int_0^t -q(u)y(u)\,du$

Or, $q(u)y(u) \underset{u \to +\infty}{=} O(q(u))$ (y est bornée).

Par théorème ~~qu~~ de comparaison, comme q est intégrable sur $[0, +\infty[$, qy l'est également.

Donc $y'(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} y'(0) - \int_0^{+\infty} q(u)y(u)\,du = l$

avec l fini.

b) Raisonnons par l'absurde :
on suppose que $\ell \neq 0$.

Quitte à considérer $-y$, nous supposerons que $\ell > 0$:

$\exists A \in \mathbb{R}_+, \forall t \in [A; +\infty[, \quad y'(t) \geq \frac{\ell}{2} > 0$

Soit $t \in [A; +\infty[$,

$$y(t) - y(A) = \int_A^t y'(u)\,du$$
$$\geq \frac{(t-A)\ell}{2} \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$$

Donc par comparaison, $y(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$,

d'où y est non-bornée $\lightning$

2) Soit z une deuxième solution bornée de (E_2).

$$W \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{vmatrix} y(t) & z(t) \\ y'(t) & z'(t) \end{vmatrix} \end{array} \right.$$

W est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad W'(t) = y'(t)z'(t) + y(t)z''(t) - (y'(t)z'(t) + y''(t)z(t))$$

$$= -y(t)q(t)z(t) - (-y(t)q(t)z(t))$$

$$= 0$$

Donc comme $\mathbb{R}_+$ est un intervalle, W est constante sur $\mathbb{R}_+$.

3) Supposons que z soit bornée.

$$W(0) = W(t) = y(t)z'(t) - y'(t)z(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

Donc par unicité de la limite, $W(0) = 0$.

Ainsi, (y, z) est liée.

q est continue, et (E_2) est une équation linéaire homogène d'ordre 2.

Par le théorème de Cauchy linéaire, $Sol(E_2)$ est un espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ de dimension 2.

Raisonnons par l'absurde :
Nous supposerons que toutes les solutions de (E_2) sont bornées.

Si $(y_1, y_2) \in Sol(E_2)^2$ forment une base de $Sol(E_2)$, alors (y_1, y_2) est liée $\lightning$.

Ainsi, il existe nécessairement une solution de (E_2) non-bornée.

Exercice 15 :

Soit $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $p \neq \tilde{0}$,

$(\mathcal{E}) : y'' + p(x)y = 0$, $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

1. Raisonnons par l'absurde en supposant que f n'est pas de signe constant :

$\exists [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, $f(\alpha) < 0 < f(\beta)$,
donc $0 \in [f(\alpha), f(\beta)]$.

Or, f est continue sur $[\alpha, \beta]$.
Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$\exists \gamma \in]\alpha, \beta[$, $f(\gamma) = 0$. $\lightning$

Ainsi, f est de signe constant sur $\mathbb{R}$.

2. D'après $(\mathcal{E})$:

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) + p(x)f(x) = 0$

donc $\underbrace{f''(x) = -\underbrace{p(x)}_{\geqslant 0}\underbrace{f(x)}_{>0}}_{\leqslant 0}$

Donc $f'' \leq \tilde{0}$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$.
f est donc concave sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

(I) $0 < f(x) \leq f'(a)(x-a) + f(a)$.

3. Soit $a \in \mathbb{R}$, raisonnons par l'absurde en supposant que $f'(a) \neq 0$:

Si $f'(a) > 0$: par passage à la limite dans l'inégalité (I), on obtient :

$$0 \leq \lim_{x \to -\infty} \left(\underbrace{f'(a)}_{>0}(x-a) + f(a) \right) = -\infty \quad ↯$$

Si $f'(a) < 0$: (I) livre cette fois :

$$0 \leq \lim_{x \to +\infty} \left(\underbrace{f'(a)}_{<0}(x-a) + f(a) \right) = -\infty \quad ↯$$

Ainsi, $f'(a) = 0$.

4. On sait que $\forall a \in \mathbb{R}$, $f'(a) = 0$.
Puisque $\mathbb{R}$ est un intervalle,
f est constante :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda.$$

Exercice 4 : TD - "Probabilités 2"

1. $\forall t \in \mathbb{R}$, $|e^{itX}| = \tilde{1}$
où $\tilde{1} \in L^1$, donc $E(e^{itX})$ existe
et ~~f~~ φ_X est bien définie.

2. Modification de l'énoncé :
- nous supposerons $X \in L^2$
- nous montrerons que φ_X est $\mathcal{C}^2$

Comme ~~f~~ $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{itX} \in L^1$, la formule de transfert nous livre :

$$E(e^{itX}) = \sum_{x \in X(\Omega)} e^{itx} P(X=x)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{e^{itn} P(X=n)}_{=: f_n(t)}$$

Appliquons le critère $\mathcal{C}^2$:

$f_n' : t \longmapsto in e^{itn} P(X=n)$,

$f_n'' : t \longmapsto -n^2 e^{itn} P(X=n)$.

Comme $\sum_{n\geq 0} P(X=n)$ converge et vaut 1,

$\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement, et donc simplement.

Comme $\sum_{n\geq 0} nP(X=n)$ converge et vaut $E(X)$,

$\sum_{n\geq 0} f_n'$ converge normalement, et donc simplement.

Comme $\sum_{n\geq 0} n^2 P(X=n)$ converge ~~et vaut~~ car $X\in L^2$,

$\sum_{n\geq 0} f_n''$ converge normalement, et donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, φ_X est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad \varphi_X'(t)=\sum_{n=1}^{+\infty} n i e^{int} P(X=n)$$

$$\text{et}\quad \varphi_X''(t)=\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 i e^{int} P(X=n)$$

$\varphi_X = 1$,

$\varphi_X'(0) = iE(X)$,

$$\begin{aligned}\varphi_X''(0) &= -E(X^2)\\ &= -(E(X^2)-E(X)^2)-E(X)^2\\ &= -V(X)-E(X)^2\end{aligned}$$

φ_X est 2π-périodique car toutes les f_n le sont.

Si $X \sim B(p)$, où $p \in]0;1[$, alors $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{int} \underbrace{P(X = n)}_{=0 \text{ si } n \geq 2}$$

$$= 1(1-p) + e^{it} p$$

Si X, Y sont 2 variables aléatoires L^2 indépendantes, alors :

$$\varphi_{X+Y} = \varphi_X \times \varphi_Y .$$