Exercice 71

1) (E_+) $x^2y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = 0$, $y \in \mathcal{C}^2(]0,+\infty[, \mathbb{R})$

(E_-) $x^2y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = 0$; $y \in \mathcal{C}^2(]-\infty, 0[, \mathbb{R})$

on pose $S^+ = Sol(E_+)$, $S^- = Sol(E_-)$

. $(E_+) \iff y'' + \underbrace{\frac{a(x)}{x^2}}_{:=a_1(x)} y' + \underbrace{\frac{b(x)}{x^2}}_{:=a_2(x)} y = 0$ (car $x \mapsto x^2$ ne s'annule pas sur $I :=]0,+\infty[$)

$a_1, a_2 \in \mathcal{C}^0(]0,+\infty[, \mathbb{R})$

donc par théorème de Cauchy-linéaire, $\dim(S^+) = \dim(Sol(E_+))$
$= 2$

De même, $\dim(S^-) = 2$

2) $\varphi \left| \begin{array}{ccc} S & \rightarrow & S^- \times S^+ \\ f & \longmapsto & (f_J, f_I) \end{array} \right.$

Soit $f \in Ker(\varphi)$.

$(f_J, f_I) = (0,0)$

donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = 0$

puisque f est solution de (E), $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et est en particulier continue en 0

donc par prolongement, $f(0) = 0$

donc $f = 0$

donc $Ker(\varphi) \subset \{0\}$

L'autre inclusion étant évidente, $Ker(\varphi) = \{0\}$

donc φ est injective.

Par théorème du rang, $\dim(S) = \underbrace{\dim(Ker(\varphi))}_{0} + \dim(\underbrace{Im(\varphi)}_{\subset S^- \times S^+})$

$\leq \dim(S^- \times S^+)$

$\leq \dim(S^-) + \dim(S^+)$

≤ 4

3) (E_+) $x^2 y'' + x y' = 0$; $y \in \mathcal{C}^2(]0,+\infty[, \mathbb{R})$.

$(E_+) \iff y'' + \frac{1}{x} y' = 0$ ($x \mapsto x^2$ ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$)

on pose $z = y' \in \mathcal{C}^1(]0,+\infty[, \mathbb{R})$

$a \left| \begin{array}{l}]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x} \end{array} \right. \in \mathcal{C}^0(]0,+\infty[, \mathbb{R})$

$(E_+) \iff z' + a(x) z = 0$

$A \left| \begin{array}{l}]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(x) \end{array} \right.$ est une primitive de a

ainsi : $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $z \left| \begin{array}{l}]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{\lambda}{x} \end{array} \right.$

donc, $\exists (\lambda, C) \in \mathbb{R}^2$, $y \left| \begin{array}{l}]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lambda \ln(x) + C \end{array} \right.$ est solution de (E_+)

et $S^+ = \mathrm{Vect}\left(\left| \begin{array}{l}]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(x) \end{array} \right. , \left| \begin{array}{l}]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \longmapsto 1 \end{array} \right. \right)$

(E_-) $x^2 y'' + x y' = 0$; $y \in \mathcal{C}^2(]-\infty, 0[, \mathbb{R})$

$(E_-) \iff y'' + \frac{1}{x} y' = 0$ ($x \mapsto x^2$ ne s'annule pas sur $]-\infty, 0[$)

on pose $a \left| \begin{array}{l} J \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} \end{array} \right. \in \mathcal{C}^0(J, \mathbb{R})$, $z = y'$

$(E_-) \iff z' + a(x) z = 0$, $z \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R})$

$A \left| \begin{array}{l} J \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(-x) \end{array} \right.$ est une primitive de a

donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $z \left| \begin{array}{l} J \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto -\frac{\lambda}{x} \end{array} \right.$

donc $\exists (\lambda, C) \in \mathbb{R}^2$, $y \left| \begin{array}{l} J \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda \ln(-x) + C \end{array} \right.$

et $S^- = \mathrm{Vect}\left(\left| \begin{array}{l} J \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(-x) \end{array} \right. ; \left| \begin{array}{l} J \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 \end{array} \right. \right)$

~~A~~ Analyse :

Supposons $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f \in S$

$f_I \in S^+$, $f_J \in S^-$

donc $\exists\ \lambda, C, \mu, D \in \mathbb{R}$, $\forall x < 0$, $f_J(x) = \lambda \ln(-x) + C$

$\forall x > 0$, $f_I(x) = \mu \ln(x) + D$

Si $\lambda \neq 0$, alors f_J a une limite infinie en 0^- ce qui n'est pas

si $\mu \neq 0$, f_I a une limite infinie en 0^+

$$\underbrace{\lim_{x \to 0^-} f_J(x)}_{C} = \underbrace{\lim_{x \to 0^+} f_I(x)}_{D}$$

donc $\begin{cases} \lambda = \mu = 0 \\ C = D \end{cases}$

$\forall x < 0$, $f_J(x) = C$

$\forall x > 0$, $f_I(x) = C$

par continuité de f en 0, $(f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$ $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto C \end{array} \right.$

Synthèse :

Les fonctions constantes sont solution de S

donc $S = \mathrm{Vect}\left(\left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 \end{array} \right. \right)$, $\dim(S) = 1$

4) (E) $x^2 y'' - 6xy' + 12y = 0$, $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$

$(E_1) \iff y'' = -\frac{12}{x^2} y + \frac{6}{x} y$

En posant $a_0 \left| \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -\frac{12}{x^2} \end{array} \right.$, $a_1 \left| \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{6}{x} \end{array} \right. \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $f_\alpha \left| \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^\alpha \end{array} \right. \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$

on a $f_\alpha' \left| \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \alpha x^{\alpha - 1} \end{array} \right.$ et $f_\alpha'' \left| \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \alpha(\alpha - 1) x^{\alpha - 2} \end{array} \right.$

Supposons $f_\alpha \in Sol(E_+)$

$\forall x>0, \quad \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} = -12x^{\alpha-2} + 6\alpha x^{\alpha-2}$

$\iff \alpha(\alpha-1) - 6\alpha + 12 = 0$

$\iff \alpha^2 - 7\alpha + 12 = 0$

$\iff \alpha = 3$ ou $\alpha = 4$

Les fonctions $y_1 \left| \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \end{array} \right.$ et $y_2 \left| \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^4 \end{array} \right.$ sont solution de (E_+)

Calculons $W(y_1, y_2)$ en $x \in \mathbb{R}_+^*$:

Soit $x>0$. $\begin{vmatrix} x^3 & x^4 \\ 3x^2 & 4x^3 \end{vmatrix} = x^6 \neq 0$

donc $W(y_1, y_2) \neq 0$ et y_1, y_2 forment une base de $Sol(E_+)$

de même, $z_1 \left| \begin{array}{l} J \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \end{array} \right.$ et $z_2 \left| \begin{array}{l} J \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^4 \end{array} \right.$ forment une base de $Sol(E_-)$

<u>Analyse</u> :

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f \in Sol(E)$

$\exists\, a, b, c, d \in \mathbb{R}^4$, $\quad \forall x<0, \; f_J(x) = ax^3 + bx^4$

$\forall x>0, \; f_I(x) = cx^3 + dx^4$

On a : $\forall x<0, \; f_J'(x) = 3ax^2 + 4bx^3$

$\forall x>0, \; f_I'(x) = 3cx^2 + 4dx^3$

et $\forall x<0, \; f_J''(x) = 6ax + 12bx^2$

$\forall x>0, \; f_I''(x) = 6cx + 12dx^2$

Par continuité de f, f' et f'' $\quad (f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}))$, $\quad f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$

<u>Synthèse</u>

Soit $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} ax^3 + bx^4 & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ cx^3 + dx^4 & \text{si } x>0 \end{cases} \end{array} \right.$ $\quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$

f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ d'après l'analyse et le théorème sur la limite de la dérivée (appliqué deux fois) et est solution de (E)

$Sol(E) = \mathrm{Vect}\left(\left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x^3 & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{array} \right. ; \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x^4 & \text{si } x \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{array} \right. ; \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x^3 & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \end{array} \right. ; \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x^4 & \text{si } x> \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \end{array} \right. \right.$

$\dim(S) = 4$

CCINP 100 :

$\lambda > 0$, X variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X=n) = \frac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$$

1) Décomposer en éléments simples R définie par $R(X) = \dfrac{1}{X(X+1)(X+2)}$

$\exists ! (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $R(X) = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X+1} + \dfrac{c}{X+2}$

on trouve $\left| \begin{array}{l} a = 1/2 \\ b = -1 \\ c = 1/2 \end{array} \right.$ (en multipliant par X puis en évaluant en 0).

2) Calculer λ

$(\mathbb{P}(X=n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une distribution de probabilités, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) = 1$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N+2}\frac{1}{n}$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \underbrace{\cancel{\sum_{n=3}^{N+2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\right)}}_{0} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}\right) + \frac{1}{N+2}$$

$$\xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{4}$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda}{n(n+1)(n+2)} = 1$ donc $\lambda = 4$

3) Montrer que X admet une espérance et la calculer

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=n) = \dfrac{4}{n(n+1)(n+2)}$

  $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+^*$

on veut montrer que $\sum_{n\geq 1} n\mathbb{P}(X=n)$ converge

or, $\dfrac{4}{(n+1)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \underbrace{\dfrac{4}{n^2}}_{\geq 0}$ donc par sommation des équivalents, $X \in \mathcal{L}^1$

- $\exists ! (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{1}{(X+1)(X+2)} = \dfrac{a}{X+1} + \dfrac{b}{X+2}$

  on trouve $\left| \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -1 \end{array} \right.$

Par télescopage, comme $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2}$$

4) X admet-elle une variance ?

$X \in \mathcal{L}^2 \Leftrightarrow \{ X \in \mathbb{R}^{\Omega}$, X est une variable aléatoire et $\sum_{x \in X(\Omega)} x^2 \, \mathbb{P}(X=x) < \infty \}$

or, $\frac{4n^2}{n(n+1)(n+2)} \sim \underbrace{\frac{4}{n}}_{\geq 0}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ ne converge pas (Riemann).

donc par sommation des équivalents, $\sum_{n \geq 1} n^2 \mathbb{P}(X=n)$ ne converge pas

donc X n'admet pas de variance.

---

exercice 5 : $p \in]0,1[$. $r \in \mathbb{N}^*$

1) loi de X :

- $X(\Omega) = [\![r, +\infty [\![$
- $\forall i \in \mathbb{N}^*$, T_i variable aléatoire telle que $T_i = \begin{cases} 0 & \text{si la bactérie n'est pas touchée au } i^{\circ} \text{ lancer.} \\ 1 & \text{si la bactérie est touchée au } i^{\circ} \text{ lancer} \end{cases}$

$$Z_i = \sum_{k=1}^{i} T_k$$

$\forall i \in \mathbb{N}^*$, $T_i \sim \mathcal{B}(p)$, $Z_i \sim \mathcal{B}(i,p)$ (car les $T_1, \dots, T_i$ sont mutuellement indépendants)

Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq r}$. $(X=n) = (T_n = 1) \cap (Z_{n-1} = r-1)$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X=n) &= \mathbb{P}(T_n = 1)\, \mathbb{P}(Z_{n-1} = r-1) \quad \text{(lemme des coalitions)} \\ &= p \binom{n-1}{r-1} p^{r-1} (1-p)^{n-r} \\ &= \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r} \end{aligned}$$

2) espérance de X :

$$\begin{aligned} \sum_{n=r}^{+\infty} n \mathbb{P}(X=n) &= \sum_{n=r}^{+\infty} n \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r} \\ &= \sum_{n=r}^{+\infty} r \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} \quad \text{(formule du capitaine)} \\ &= \frac{r\,p^r}{r!} \sum_{n=r}^{+\infty} \frac{n!}{(n-r)!} (1-p)^{n-r} \end{aligned}$$

On pose $f \left| \begin{array}{l}]-1,1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \end{array} \right.$

f est développable en série entière sur $]-1,1[$ donc ~~continue~~ $\mathcal{C}^{\infty}$ et on peut dériver termes à termes

$\forall x \in]-1,1[$, $f^{(r)}(x) = \frac{r!}{(1-x)^{r+1}}$

$(1-p) \in]-1,1[$, donc $\sum_{n=r}^{+\infty} \frac{n!}{(n-r)!} (1-p)^{n-r} = \frac{r!}{p^{r+1}}$

Donc $\sum_{n=r}^{+\infty} n \mathbb{P}(X=n) = \frac{r}{r!} p^r \frac{r!}{p^{r+1}}$

$$= \frac{r}{p}$$