

TD – Probabilités 2

Exercice de la banque CCINP n°96. — Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbf{N} , de loi de probabilité donnée par, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}(X = n) = p_n$. La fonction génératrice de X est notée \mathbf{G}_X et elle

est définie par : $\mathbf{G}_X(t) = \mathbf{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$.

1. Prouver que l'intervalle $] -1, 1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de \mathbf{G}_X .
2. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans \mathbf{N} . On pose $S = X_1 + X_2$. Démontrer que, pour tout $t \in] -1, 1[$, $\mathbf{G}_S(t) = \mathbf{G}_{X_1}(t) \mathbf{G}_{X_2}(t)$:
 - (a) en utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières.
 - (b) en utilisant uniquement la définition de la fonction génératrice.

Remarque : on admettra, pour la question suivante, que ce résultat est généralisable à n variables aléatoires indépendantes à valeurs dans \mathbf{N} .

3. Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans ce sac. On note S_n la somme des numéros tirés. Soit $t \in] -1, 1[$. Déterminer $\mathbf{G}_{S_n}(t)$ puis en déduire la loi de S_n .

Exercice de la banque CCINP n°110. — Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé.

1. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et à valeurs dans \mathbf{N} . On considère la série entière $\sum t^n \mathbf{P}(X = n)$ de variable réelle t . On note R_X son rayon de convergence.

(a) Prouver que $R_X \geq 1$. On pose $\mathbf{G}_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \mathbf{P}(X = n)$ et on note $\mathcal{D}_{\mathbf{G}_X}$ l'ensemble de définition de \mathbf{G}_X . Justifier que $[-1, 1] \subset \mathcal{D}_{\mathbf{G}_X}$. Pour tout réel t fixé de $[-1, 1]$, exprimer $\mathbf{G}_X(t)$ sous forme d'une espérance.

(b) Soit $k \in \mathbf{N}$. Exprimer, en justifiant la réponse, $\mathbf{P}(X = k)$ en fonction de $\mathbf{G}_X^{(k)}(0)$.

2. (a) On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ . Déterminer $\mathcal{D}_{\mathbf{G}_X}$ et, pour tout $t \in \mathcal{D}_{\mathbf{G}_X}$, calculer $\mathbf{G}_X(t)$.
- (b) Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2 . Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de $X + Y$.

Exercice de la banque CCINP n°97. — Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans \mathbf{N}^2 dont la loi est donnée par :

$$\forall (j, k) \in \mathbf{N}^2 \quad \mathbf{P}((X, Y) = (j, k)) = \frac{(j+k) \left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{e^j k!}$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y . Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Prouver que $\mathbf{E}(2^{X+Y})$ existe et la calculer.

Exercice de la banque CCINP n°100. — Soit $\lambda \in]0, +\infty[$. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans \mathbf{N}^* . On suppose que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{P}(X = n) = \frac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle R définie par $R(X) = \frac{1}{X(X+1)(X+2)}$.
2. Calculer λ .
3. Prouver que X admet une espérance, puis la calculer.
4. X admet-elle une variance ? Justifier.

Exercice de la banque CCINP n°108. — Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et à valeurs dans \mathbf{N} . On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \mathbf{N}^2 \quad \mathbf{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{1}{e 2^{i+1} j!}$$

1. Déterminer les lois de X et de Y .
2. (a) Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X .
(b) Déterminer l'espérance et la variance de Y .
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $\mathbf{P}(X = Y)$.

Exercice 1 ★☆☆ — Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires discrètes à valeurs réelles, mutuellement indépendantes, de même loi. On suppose qu'elles possèdent une espérance et une variance, notée respectivement m et σ^2 .

1. Démontrer que la variable aléatoire $X = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n X_k$ possède une espérance et une variance, puis les calculer.
2. Calculer l'espérance de $\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_i - X)^2$.

esperanceVarianceMoyenneCarresEcartMoyenne

Exercice 2 ★☆☆ — Cet exercice a été proposé à l'oral du concours Mines-Télécom.

1. Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov.
2. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs réelles. Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \mathbf{P}(X \geq x) \leq e^{-2x} \mathbf{E}(e^{2X})$$

applicationInegaliteMarkov

Exercice 3 ★★★ — Soit $p \in]0, 1[$. On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ définies sur le même espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes, suivant toutes la loi $\mathcal{B}(p)$. On pose, pour tout $r \in \mathbf{N}^*$:

$$T_r := \inf \{n \in \mathbf{N}^* : X_1 + \dots + X_n = r\} \quad [\text{temps d'arrêt}]$$

1. Démontrer que, pour tout $r \in \mathbf{N}^*$, T_r est une variable aléatoire sur l'espace probabilisable (Ω, \mathcal{A}) .
2. Reconnaître la loi de T_1 .
3. On fixe un entier $r \geq 2$.
 - (a) Calculer, pour tout entier $n \geq r$, $\mathbf{P}(T_r = n)$.
 - (b) Démontrer que la variable aléatoire T_r est presque sûrement finie.
4. Soient Y_1, \dots, Y_r des variables aléatoires définies sur le même espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes, suivant toutes la loi $\mathcal{G}(p)$.
 - (a) Déterminer la loi de $Y_1 + \dots + Y_r$.
 - (b) Démontrer que T_r possède une espérance finie et la calculer.

esperanceLoiPascal

Exercice 4 ★★★ — Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. À toute variable aléatoire $X: \Omega \rightarrow \mathbf{N}$, on associe sa fonction caractéristique qui est l'application définie par :

$$\varphi_X \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C} \\ t \longmapsto \mathbf{E}(e^{itX}) \end{array} \right.$$

Soit $X: \Omega \rightarrow \mathbf{N}$ une variable aléatoire, qui possède un moment d'ordre 2.

1. Justifier que la fonction φ_X est bien définie.
2. Montrer que φ_X est de classe \mathcal{C}^2 et 2π -périodique.
3. Calculer $\varphi_X(0)$, $\varphi'_X(0)$ et $\varphi''_X(0)$.
4. Soit $p \in]0, 1[$. Calculer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X de loi $\mathcal{B}(p)$.
5. Soit $(n, p) \in \mathbf{N}^* \times]0, 1[$. Calculer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X de loi $\mathcal{B}(n, p)$ ($n \in \mathbf{N}^*$).
6. Soit $X: \Omega \rightarrow \mathbf{N}$ une variable aléatoire. Soit $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\mathbf{P}(X = n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_X(t) e^{-itn} dt$$

7. En déduire que deux variables aléatoires $X: \Omega \rightarrow \mathbf{N}$ et $Y: \Omega \rightarrow \mathbf{N}$ vérifiant $\varphi_X = \varphi_Y$, ont même loi.
8. Soient $X: \Omega \rightarrow \mathbf{N}$ et $Y: \Omega \rightarrow \mathbf{N}$ deux variables aléatoires indépendantes. Montrer que $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$.

fonctionCaracteristiqueVariableAleatoire

Exercice 5 ★★★ — Soient $p \in]0, 1[$ et $r \in \mathbf{N}^*$. On dépose une bactérie dans une enceinte fermée au temps $t = 0$. On envoie un rayon laser dans cet enceinte chaque seconde. Le premier rayon est envoyé au temps $t = 1$. La bactérie a une probabilité p d'être touchée par le rayon. Elle meurt quand elle a été touchée r fois. Les tirs de laser sont mutuellement indépendants. Notons X la durée de vie de la bactérie.

1. Déterminer la loi de X .
2. Prouver que X admet une espérance et la calculer.

tirLaserBacteries

Exercice 6 ★★★ — Soient N une variable aléatoire à valeurs dans \mathbf{N}^* et $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans \mathbf{N} , de même loi. On suppose toutes ces variables aléatoires indépendantes. On note :

$$S = \sum_{k=1}^N X_k \quad [\text{le nombre de termes de la somme est aléatoire}]$$

1. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \mathbf{P}(S = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(N = k) \mathbf{P}(X_1 + \dots + X_k = n)$$

2. En déduire

$$\forall t \in [-1, 1] \quad \mathbf{G}_S(t) = \mathbf{G}_N(\mathbf{G}_{X_1}(t))$$

3. Supposons que N et X_1 possèdent une espérance finie. Démontrer que S possède une espérance finie et que :

$$\mathbf{E}(S) = \mathbf{E}(N) \mathbf{E}(X_1) \quad [\text{formule de Wald}]$$

4. On lance une pièce équilibrée. Tant que l'on obtient pile, on lance on dé équilibré à six faces. Dès que l'on obtient face, on s'arrête. Déterminer l'espérance du nombre total de points accumulés au cours d'une partie.

formuleWald

Exercice 7 ★★★ — Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs réelles possédant un moment d'ordre 2, non nulle presque sûrement et telle que $\mathbf{E}(X) \geq 0$. Démontrer que :

$$\forall \theta \in]0, 1[\quad \mathbf{P}(X \geq \theta \mathbf{E}(X)) \geq (1 - \theta)^2 \frac{\mathbf{E}(X)^2}{\mathbf{E}(X^2)} \quad [\text{inégalité de Paley-Zygmund}]$$

inegalitePaleyZygmund [\[corrigé\]](#)

Exercice 8 ★★★ — On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ de variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $p \in]0, 1[$. On pose :

$$T := \inf \{n \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\} : X_n = X_{n-1} = 1\} \quad [\text{temps d'arrêt}]$$

1. Démontrer que T est presque sûrement fini.
2. Calculer $\mathbf{P}(T = 2)$ et $\mathbf{P}(T = 3)$.
3. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Exprimer $\mathbf{P}(T = n + 2)$ et fonction de $\mathbf{P}(T = n + 1)$, et $\mathbf{P}(T = n)$.
4. Démontrer que T possède une espérance et la calculer.

esperanceTempsArretDeuxPileConsecutifs [\[corrigé\]](#)

Exercice 9 ★★★ — Soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbf{N} . Soit g la fonction définie par :

$$g \left| \begin{array}{l} [-1, 1]^2 \longrightarrow \mathbf{R} \\ (u, v) \longmapsto \mathbf{E}(u^X v^Y) \end{array} \right.$$

1. Justifier que la fonction g est bien définie.
2. Comment s'obtiennent les fonctions génératrices de X et Y à partir de la fonction g ?
3. Démontrer que la fonction g est de classe C^∞ sur $] -1, 1[\times] -1, 1[$.
4. Retrouver la loi conjointe du couple (X, Y) à partir des dérivées partielles en $(0, 0)$.

fonctionGeneratriceLoiConjointe

Exercice 10 ★★★ — Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes, à valeurs réelles, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que Y est d'espérance finie. Démontrer que :

$$\mathbf{E}(Y) = \sum_{x \in X(\Omega), \mathbf{P}(X=x) \neq 0} \mathbf{E}(Y | X = x) \mathbf{P}(X = x)$$

où, pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbf{P}(X = x) \neq 0$, $\mathbf{E}(Y | X = x)$ désigne l'espérance de la loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$.

esperanceConditionnelle

Exercice 11 ★★★ — On considère une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbf{N} et deux variables aléatoires Y, Z de même loi et indépendantes. Démontrer que $Y + Z \sim 2X$ si et seulement si X est constante presque sûrement.

doubleVariableMemeLoiSommeDeuxVariablesIndependantes

Un corrigé de l'exercice 7

(a) *Reformulation de l'inégalité à démontrer.* — Soit $\theta \in]0, 1[$. Comme $\mathbf{E}(X^2) > 0$:

$$\mathbf{P}(X \geq \theta \mathbf{E}(X)) \geq (1 - \theta)^2 \frac{\mathbf{E}(X)^2}{\mathbf{E}(X^2)} \iff \mathbf{E}((1 - \theta)X)^2 \leq \mathbf{P}(X \geq \theta \mathbf{E}(X)) \mathbf{E}(X^2)$$

On rappelle que, si A est un événement, alors $\mathbf{1}_A$ est une variable de Bernoulli de paramètre $\mathbf{P}(A)$, d'où $\mathbf{P}(A) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_A)$. En particulier :

$$\mathbf{P}(X \geq \theta \mathbf{E}(X)) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_{(X \geq \theta \mathbf{E}(X))})$$

L'inégalité à démontrer est donc équivalente à :

$$\mathbf{E}((1 - \theta)X)^2 \leq \mathbf{E}(\mathbf{1}_{(X \geq \theta \mathbf{E}(X))}) \mathbf{E}(X^2) = \mathbf{E}\left(\left(\mathbf{1}_{(X \geq \theta \mathbf{E}(X))}\right)^2\right) \mathbf{E}(X^2) \quad (1)$$

(b) *Une majoration de $\mathbf{E}((1 - \theta)X)$.* — La linéarité de l'espérance et :

$$X = \mathbf{1}_{(X < \theta \mathbf{E}(X))} X + \mathbf{1}_{(X \geq \theta \mathbf{E}(X))} X$$

livrent :

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_{(X < \theta \mathbf{E}(X))} X) + \mathbf{E}(\mathbf{1}_{(X \geq \theta \mathbf{E}(X))} X) \quad (2)$$

On remarque que :

$$\mathbf{1}_{(X < \theta \mathbf{E}(X))} X \leq \theta \mathbf{E}(X)$$

La croissance de l'espérance entraîne que :

$$\mathbf{E}(\mathbf{1}_{(X < \theta \mathbf{E}(X))} X) \leq \theta \mathbf{E}(X) \quad (3)$$

De (2) et (3) nous déduisons :

$$(1 - \theta) \mathbf{E}(X) \leq \mathbf{E}(\mathbf{1}_{(X \geq \theta \mathbf{E}(X))} X) \quad (4)$$

(c) *Conclusion avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz.* — D'après (4) et de $\mathbf{E}(X) \geq 0$:

$$0 \leq \mathbf{E}((1 - \theta)X) \leq \mathbf{E}(\mathbf{1}_{(X \geq \theta \mathbf{E}(X))} X)$$

La fonction carrée étant croissante sur \mathbf{R}_+ , il vient :

$$\mathbf{E}((1 - \theta) \mathbf{E}(X))^2 \leq \mathbf{E}(\mathbf{1}_{(X \geq \theta \mathbf{E}(X))} X)^2$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous pouvons compléter cette inégalité en :

$$\mathbf{E}((1 - \theta) \mathbf{E}(X))^2 \leq \mathbf{E}(\mathbf{1}_{(X \geq \theta \mathbf{E}(X))} X)^2 \leq \mathbf{E}\left(\left(\mathbf{1}_{(X \geq \theta \mathbf{E}(X))}\right)^2\right) \mathbf{E}(X^2)$$

L'identité (1) est démontrée.

Un corrigé de l'exercice 8

1. Observons que :

$$(T = \infty) = \bigcap_{k=1}^{+\infty} (X_k X_{k+1} = 0) \subset \bigcap_{k=1}^{+\infty} (X_{2k} X_{2k+1} = 0)$$

d'où, par croissance de la probabilité :

$$0 \leq \mathbf{P}(T = \infty) \leq \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} (X_{2k} X_{2k+1} = 0)\right) \quad (5)$$

Par continuité de la probabilité :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} (X_{2k} X_{2k+1} = 0)\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^n (X_{2k} X_{2k+1} = 0)\right) \quad (6)$$

Fixons $n \in \mathbf{N}^*$. D'après le lemme des coalitions, les variables aléatoires $X_2 X_3, X_4 X_5, \dots, X_{2n} X_{2n+1}$ sont mutuellement indépendantes. Ainsi l'identité (6) s'écrit encore :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} (X_{2k} X_{2k+1} = 0)\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \mathbf{P}(X_{2k} X_{2k+1} = 0) \quad (7)$$

Fixons $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Les variables X_{2k}, X_{2k+1} sont des variables de loi $\mathcal{B}(p)$, qui sont indépendantes. Ainsi $X_{2k} X_{2k+1} \sim \mathcal{B}(p^2)$ et :

$$\mathbf{P}(X_{2k} X_{2k+1} = 0) = 1 - p^2 \quad (8)$$

De (7) et (8), nous déduisons :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} (X_{2k} X_{2k+1} = 0)\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n (1 - p^2)^n = 0 \quad (9)$$

De (5) et (9), nous déduisons que $(T = +\infty)$ est négligeable.

2. (a) De $(T = 2) = (X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)$ et de l'indépendance des variables X_1, X_2 , nous déduisons :

$$\mathbf{P}(T = 2) = \mathbf{P}(X_1 = 1) \mathbf{P}(X_2 = 1) = p^2$$

(b) De $(T = 3) = (X_1 = 0) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 1)$ et de l'indépendance mutuelle des variables X_1, X_2, X_3 , nous déduisons :

$$\mathbf{P}(T = 3) = \mathbf{P}(X_1 = 0) \mathbf{P}(X_2 = 1) \mathbf{P}(X_3 = 1) = p^2 (1 - p)$$

3. La famille $((X_1 = 0), (X_1 = 1, X_2 = 1), (X_1 = 1, X_2 = 0))$ est un système quasi-complet d'événements. La formule des probabilités totales nous livre, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(T = n + 2) &= \underbrace{\mathbf{P}(T = n + 2 \mid X_1 = 0)}_{=\mathbf{P}(T=n+1)} \underbrace{\mathbf{P}(X_1 = 0)}_{=1-p} \\ &+ \underbrace{\mathbf{P}(T = n + 2 \mid X_1 = 1, X_2 = 1)}_{=0} \mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) \\ &+ \underbrace{\mathbf{P}(T = n + 2 \mid X_1 = 1, X_2 = 0)}_{=\mathbf{P}(T=n)} \underbrace{\mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 0)}_{=p(1-p)} \end{aligned}$$

i.e. :

$$\mathbf{P}(T = n + 2) = (1 - p) \mathbf{P}(T = n + 1) + p(1 - p) \mathbf{P}(T = n)$$

4. (a) *Expression de $\mathbf{P}(T = n)$ en fonction de n , où $n \geq 2$.* — D'après la question précédente, la suite $(\mathbf{P}(T = n))_{n \geq 2}$ est donc récurrente linéaire d'ordre 2. Introduisons le polynôme de degré 2 :

$$Q := X^2 - (1-p)X - p(1-p)$$

Son discriminant vaut $\Delta := (1-p)^2 + 4p(1-p) = (1-p)(1+3p) > 0$ et ses deux racines réelles sont :

$$r_1 := \frac{1-p - \sqrt{(1-p)(1+3p)}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 := \frac{1-p + \sqrt{(1-p)(1+3p)}}{2}$$

Elles sont non nulles car $p(1-p) \neq 0$. Il existe des scalaires λ_1, λ_2 tels que, pour tout $n \geq 2$:

$$\mathbf{P}(T = n) = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n$$

D'après la question 2 :

$$\lambda_1 r_1^2 + \lambda_2 r_2^2 = \mathbf{P}(T = 2) = p^2 \quad \text{et} \quad \lambda_1 r_1^3 + \lambda_2 r_2^3 = \mathbf{P}(T = 3) = p^2(1-p)$$

Nous en déduisons que :

$$\begin{pmatrix} r_1^2 & r_2^2 \\ r_1^3 & r_2^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2 \\ p^2(1-p) \end{pmatrix}$$

puis :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{r_1^2 r_2^3 - r_1^3 r_2^2} \begin{pmatrix} r_2^3 & -r_2^2 \\ -r_1^3 & r_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^2 \\ p^2(1-p) \end{pmatrix}$$

Nous en déduisons que $\lambda_1 = \frac{p^2}{r_1(r_1 - r_2)}$ et $\lambda_2 = \frac{p^2}{r_2(r_2 - r_1)}$. Nous avons donc établi que :

$$\forall n \geq 2 \quad \mathbf{P}(T = n) = \frac{p^2}{r_1 - r_2} r_1^{n-1} - \frac{p^2}{r_2 - r_1} r_2^{n-1} = \frac{p^2}{r_2 - r_1} (r_2^{n-1} - r_1^{n-1}) \quad (10)$$

- (b) *Les nombres r_1 et r_2 sont strictement compris entre -1 et 1 .* —

- Le sommet de la parabole représentant la fonction $\tilde{Q}: x \mapsto Q(x)$ a pour abscisse $(1-p)/2$.
- La fonction \tilde{Q} est strictement décroissante sur $] -\infty, (1-p)/2]$ et s'annule uniquement en r_1 sur cet intervalle. Comme :

$$-1 \in] -\infty, (1-p)/2] \quad \text{et} \quad Q(-1) = 1 + (1-p)^2 > 0$$

nous en déduisons que $-1 < r_1 < (1-p)/2$.

- La fonction \tilde{Q} est strictement croissante sur $[(1-p)/2, +\infty[$ et s'annule uniquement en r_2 sur cet intervalle. Comme :

$$1 \in [(1-p)/2, +\infty[\quad \text{et} \quad Q(1) = p^2 > 0$$

nous en déduisons que $(1-p)/2 < r_2 < 1$.

Ainsi $-1 < r_1 < (1-p)/2 < r_2 < 1$.

- (c) *Conclusion sur l'espérance de T .* — D'après le cours sur la série entière $\sum x^n$, pour tout $x \in]-1, 1[$, la série numérique $\sum_{n \geq 1} n x^{n-1}$ est absolument convergente, de somme $1/(1-x)^2$. Nous en déduisons

que les séries numériques $\sum_{n \geq 2} n r_1^{n-1}$ et $\sum_{n \geq 2} n r_2^{n-1}$ convergent et que leurs sommes valent :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n r_1^{n-1} = \frac{1}{(1-r_1)^2} - 1 = \frac{2r_1 - r_1^2}{(1-r_1)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n r_2^{n-1} = \frac{1}{(1-r_2)^2} - 1 = \frac{2r_2 - r_2^2}{(1-r_2)^2}$$

D'après (10) et les résultats de linéarité sur les séries convergentes, la série $\sum_{n \geq 2} n \mathbf{P}(T = n)$ converge.

La variable T possède donc une espérance finie. De plus :

$$\mathbf{E}(T) = \sum_{n=2}^{+\infty} n \mathbf{P}(T = n) = \frac{p^2}{r_2 - r_1} \left(\frac{2r_2 - r_2^2}{(1-r_2)^2} - \frac{2r_1 - r_1^2}{(1-r_1)^2} \right)$$