TD – Probabilités 1

Exercice de la banque CCINP n°97 (tronqué). — *Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}^2$ dont la loi est donnée par*

$$\forall (j,k) \in \mathbf{N}^2 \quad \mathbf{P}\left((X,Y)=(j,k)\right) = \frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}$$

1. *Déterminer les lois marginales de X et de Y.*
2. *Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?*

Exercice de la banque CCINP n°100 (tronqué). — *Soit $\lambda \in \,]0,+\infty[$. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbf{N}^*$. On suppose que*

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^* \quad \mathbf{P}\left(X=n\right) = \frac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$$

1. *Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle R définie par $R(X) = \dfrac{1}{X(X+1)(X+2)}$.*
2. *Calculer λ.*

Exercice de la banque CCINP n°101 (tronqué). — *Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C. À l'instant $t=0$, il se trouve au point A. Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau. L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.*
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On note A_n l'événement «l'animal est en A après son $n^{\text{ième}}$ trajet».
On note B_n l'événement «l'animal est en B après son $n^{\text{ième}}$ trajet».
On note C_n l'événement «l'animal est en C après son $n^{\text{ième}}$ trajet».
On pose $\mathbf{P}\left(A_n\right) = a_n$, $\mathbf{P}\left(B_n\right) = b_n$ et $\mathbf{P}\left(C_n\right) = c_n$.

1. (a) *Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.*
   (b) *Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.*
2. *On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.*
   (a) *Prouver que $-\dfrac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.*
   (b) *Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.*
   Le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.
3. *Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.*
   Aucune expression finalisée de a_n, b_n et c_n n'est demandée.

Exercice de la banque CCINP n°102 (tronqué). — *Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in \,]0,1[$. On pose $q = 1-p$. On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.*

1. *Soit $i \in [\![1,N]\!]$. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Déterminer $\mathbf{P}\left(X_i \leqslant n\right)$, puis $\mathbf{P}\left(X_i > n\right)$.*
2. *On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} (X_i)$, c'est-à-dire*

$$\forall\, \omega \in \Omega \quad Y(\omega) = \min\left(X_1(\omega), \cdots, X_N(\omega)\right)$$

   où min *désigne « le plus petit élément de ».*
   (a) *Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer $\mathbf{P}\left(Y > n\right)$. En déduire $\mathbf{P}\left(Y \leqslant n\right)$, puis $\mathbf{P}\left(Y = n\right)$.*
   (b) *Reconnaître la loi de Y.*

Exercice de la banque CCINP n°103 (tronqué). — *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé.*

1. *Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \,]0,+\infty[^2$. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.*

2. *Soit $p \in \left]0,1\right]$. Soit $\lambda \in \left]0,+\infty\right[$. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ. On suppose que $X(\Omega) = \mathbf{N}$ et que, pour tout $m \in \mathbf{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre (m, p). Déterminer la loi de X.*

Exercice de la banque CCINP n°106 (tronqué). — *X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbf{N}$. Elles suivent la même loi définie par*

$$\forall\, k \in \mathbf{N} \quad \mathbf{P}\,(X = k) = \mathbf{P}\,(Y = k) = p\, q^k$$

où $p \in \left]0,1\right[$ et $q = 1 - p$. On considère alors les variables U et V définies par $U = \sup(X, Y)$ et $V = \inf(X, Y)$.

1. *Déterminer la loi du couple (U, V).*
2. *Déterminer la loi marginale de U. On admet que $V(\Omega) = \mathbf{N}$ et que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \mathbf{P}\,(V = n) = p\, q^{2n}\,(1 + q)$$

3. *Prouver que $W = V + 1$ suit une loi géométrique.*
4. *U et V sont-elles indépendantes ?*

Exercice de la banque CCINP n°108 (tronqué). — *Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et à valeurs dans $\mathbf{N}$. On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par*

$$\forall\,(i, j) \in \mathbf{N}^2 \quad \mathbf{P}\,((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1} j!}$$

1. *Déterminer les lois de X et de Y.*
2. *Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique.*
3. *Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?*
4. *Calculer $\mathbf{P}\,(X = Y)$.*

Exercice de la banque CCINP n°109. — *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2. On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne. On suppose que tous les tirages sont équiprobables.*
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. *Déterminer la loi de X.*
2. *Déterminer la loi de Y.*

Exercice de la banque CCINP n°111 (tronqué). — *On admet que, pour tout $q \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, la série $\sum_{k \geqslant q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge et que*

$$\sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}$$

Soit $p \in \left]0,1\right[$. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et à valeurs dans $\mathbf{N}$. On suppose que la loi de probabilité du couple (X, Y) est donnée par

$$\forall\,(k, n) \in \mathbf{N}^2 \quad \mathbf{P}\,((X = k) \cap (Y = n)) = \begin{cases} \dbinom{n}{k} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. *Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.*
2. (a) *Déterminer la loi de Y.*
   (b) *Prouver que $1 + Y$ suit une loi géométrique.*
3. *Déterminer la loi de X.*

Exercice 1 ★★☆ — *On lance un dé équilibré jusqu'à l'obtention d'un 6. Quelle est la probabilité que tous les chiffres obtenus soient pairs ?*

`suiteLancersDeArretSixTouschiffresPairs`

Exercice 2 ★☆☆ — *Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Déterminer la loi de $X+Y$.*

`sommeVariablesIndependantesLoiGeometrique`

Exercice 3 ★☆☆ — *Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant lq loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Reconnaître la loi conditionnelle de X sachant $(X+Y=n)$.*

`sommeVariablesIndependantesLoiExponentielleLoiConditionnelle`

Exercice 4 ★★☆ — *On lance une pièce équilibrée une infinité de fois jusqu'à l'obtention de deux PILE consécutifs.*

1. *Quel est la probabilité que le jeu s'arrête ?*
2. *Généraliser à un autre motif que PILE, PILE.*

`suiteLancersPieceMotif`

Exercice 5 ★★☆ — *On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers et ζ la fonction définie par*

$$\zeta \left| \begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ s & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \end{array} \right.$$

Soient $s > 1$ et N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^* \quad \mathbf{P}\left(N = n\right) = \frac{1}{\zeta(s)\, n^s}$$

Pour tout nombre $p \in \mathcal{P}$, on note X_p l'indicatrice de l'événement $(\, p \mid N\,)$. Démontrer que les variables X_p $(p \in \mathcal{P})$, sont mutuellement indépendantes.

`loiZetaIndependance`

Exercice 6 ★★☆ — *On lance indéfiniment une pièce qui donne PILE avec probabilité $p \in]0,1[$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale à 1 si PILE a été obtenu lors du n-ième lancer de la pièce et 0 sinon. Pour tout $r \in \mathbf{N}^*$, on note*

$$T_r := \min\left\{ n \in \mathbf{N}^* \ : \ \sum_{k=1}^{n} X_k = r \right\} \in [\![r, +\infty]\!]$$

la variable aléatoire égale au rang d'apparition du r-ième PILE.

1. *Démontrer que, pour tout $r \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{P}\left(T_r = +\infty\right) = 0$.*
2. *Déterminer, pour tout $r \in \mathbf{N}^*$, la loi de T_r.*
3. *Donner, pour tout $r \in \mathbf{N}^*$, la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{k-1}{r-1} p^r \left(1-p\right)^{k-r}$?*
4. *On pose $S_1 = T_1$ et, pour tout $n \geqslant 2$, $S_n = T_n - T_{n-1}$. Démontrer que les variables aléatoires $(S_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ sont indépendantes et de même loi.*

`loiPascal`

Exercice 7 ★★★ — *Pour tout $a \in \mathbf{N}^*$, on pose*

$$\langle\, a \,\rangle := \{ k\, a \ : \ k \in \mathbf{N}^* \} \qquad [\textit{ensemble des multiples de } a]$$

Soient $\mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}$ deux probabilités sur l'espace probabilisable $\left(\mathbf{N}^*, \mathcal{P}\left(\mathbf{N}^*\right)\right)$ telles que

$$\forall\, a \in \mathbf{N}^* \quad \mathbf{P}\left(\langle\, a \,\rangle\right) = \mathbf{Q}\left(\langle\, a \,\rangle\right)$$

Démontrer que les probabilités $\mathbf{P}$ *et* $\mathbf{Q}$ *sont égales.*

`probabiliteEntiersEnsemblesMultiples` [indication(s)]

Exercice 8 ★★★ — *Soient* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ *un espace probabilisé et* $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *une suite d'événements mutuellement indépendants tels que la série* $\sum \mathbf{P}(A_n)$ *diverge.*

1. *Démontrer que*
$$A_\infty := \{\omega \in \Omega \ : \ \text{il existe une infinité d'entiers naturels } n \text{ tels que } \omega \in A_n\}$$
est un événement.
2. *Démontrer que* $\mathbf{P}(A_\infty) = 1$.
3. *On lance indéfiniment une pièce équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir un million de PILE consécutifs ?*

`lemmeCantelli`

`probabiliteEntiersEnsemblesMultiples` [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 7

(a) Puisqu'une probabliité sur $(\mathbf{N}^*, \mathcal{P}(\mathbf{N}^*))$ est caractérisée par sa distribution de probabilités associée sur $\mathbf{N}^*$, il suffit de démontrer que

$$\forall\, a \in \mathbf{N}^* \quad \mathbf{P}(\{a\}) = \mathbf{Q}(\{a\})$$

(b) Démontrer que, pour tous $a_1, \ldots, a_n$ entiers naturels non nuls

$$\bigcap_{i=1}^{n} \langle\, a_i \,\rangle = \langle\, a_1 \vee \ldots \vee a_n \,\rangle \qquad [\vee \text{ désigne le PPCM}]$$

(c) Grâce à la formule de Poincaré (ou du crible), en déduire que, pour tous $a_1, \ldots, a_n$ entiers naturels non nuls

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \langle\, a_i \,\rangle\right) = \mathbf{Q}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \langle\, a_i \,\rangle\right)$$

(d) Soit $a \in \mathbf{N}^*$ Démontrer que

$$\{a\} = \langle\, a \,\rangle \setminus \left(\bigcup_{k=2}^{+\infty} \langle\, k\, a \,\rangle\right)$$

(d) Justifier que

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=2}^{+\infty} \langle\, k\, a \,\rangle\right) = \mathbf{Q}\left(\bigcup_{k=2}^{+\infty} \langle\, k\, a \,\rangle\right)$$