TD – Intégration sur un intervalle quelconque

Exercice 1 ★☆☆ — *Étudier l'intégrabilité de chacune des fonctions suivantes, sur l'intervalle I indiqué.*

(1) $f\colon t \longmapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}$, $I =]0, +\infty[$

(2) $f\colon t \longmapsto \ln(t)\ \mathrm{e}^{-t}$, $I =]0, +\infty[$

(3) $f\colon t \longmapsto \dfrac{\sin^3(t)}{t^2}$, $I =]0, +\infty[$

(4) $f\colon t \longmapsto \dfrac{\arctan\left(t^2+1\right)}{t^2+1}$, $I = [1, +\infty[$

(5) $f\colon t \longmapsto \arctan\left(\sin\left(\dfrac{1}{t^2}\right)\right)$, $I = [1, +\infty[$

(6) $f\colon u \longmapsto \dfrac{\ln(u)}{u^2+1}$, $I =]0, +\infty[$

(7) $f\colon t \longmapsto \dfrac{1}{(1-t)\sqrt{t}}$, $I =]0, 1[$

(8) $f\colon t \longmapsto \dfrac{1}{t^{3/2}}\sqrt{\sin\left(t^2\right)}$, $I =]0, 1]$

(9) $f\colon t \longmapsto \ln(t)\ \ln(1-t)$, $I =]0, 1[$

(10) $f\colon t \longmapsto \mathrm{e}^{-\ 1/t^2}$, $I =]0, 1]$

(11) $f\colon t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}\ \mathrm{e}^{-1/t}\ \sin\left(\dfrac{1}{t}\right)$, $I =]0, 1]$

(12) $f\colon x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x-1}}$, $I =]1, +\infty[$

(13) $f\colon t \longmapsto \dfrac{\sin^2(t)}{t}$, $I =]0, +\infty[$

`integrabiliteNiveau1` [indication(s)]

Exercice 2 ★★☆ — *Étudier l'intégrabilité de chacune des fonctions suivantes, sur l'intervalle I indiqué.*

(1) $f\colon t \longmapsto t\left(\dfrac{1}{t} - \sin\left(\dfrac{1}{t}\right)\right)$, $I =]0, +\infty[$

(2) $f\colon t \longmapsto t\,\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}$, $I = [1, +\infty[$

(3) $f\colon x \longmapsto \dfrac{1}{x^x}$, $I =]0, +\infty[$

(4) $f\colon t \longmapsto \dfrac{\ln(\sin(t))}{t}$, $I =]0, 1]$

(5) $f\colon t \longmapsto \mathrm{e}^{1/\sqrt{t}}$, $I =]0, 1]$

(6) $f\colon t \longmapsto \mathrm{e}^{-t\arctan(t)}$, $I = [0, +\infty[$

`integrabiliteNiveau2` [indication(s)]

Exercice 3 ★★★ — *Étudier l'intégrabilité de chacune des fonctions suivantes, sur l'intervalle I indiqué.*

(1) $f\colon t \longmapsto \dfrac{1}{t}\sin\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right)\right)$, $I =]0, +\infty[$

(2) $f\colon t \longmapsto \mathrm{e}^{\sin(t)}$, $I = [1, +\infty[$

(3) $f\colon t \longmapsto \mathrm{e}^{1/\sqrt{-\ln(t)}}$, $I =]0, 1[$

(4) $f\colon t \longmapsto \dfrac{\sqrt{-\ln(t)}}{t^{3/2}}$, $I =]0, 1]$

(5) $f\colon t \longmapsto \mathrm{e}^{-t\ \sin(t)}$, $I = [0, +\infty[$

(6) $f\colon t \longmapsto (t+1)^{\frac{1}{t+1}} - 1 - \dfrac{\ln(t)}{t}$, $I = [1, +\infty[$

`integrabiliteNiveau3` [indication(s)]

Exercice 4 ★☆☆ — *Étudier la nature de chacune des intégrales suivantes.*

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\ln(t)}\ \mathrm{d}t$

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^{2/3}}\sin\left(\frac{1}{t}\right)\ \mathrm{d}t$

(3) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\left(\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x}\right)\ \sin(x)}{(1-\cos(x))\sqrt{\tan(x)}}\ \mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2 - \frac{1}{t^2}\right)\ \mathrm{d}t$

`natureIntegrale`

Exercice 5 ★★☆ — *Démontrer la convergence et calculer la valeur de chacune des intégrales suivantes.*

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\, dt$ (2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(t)\ln(\sin(t))\, dt$ (3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}\, dt$

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+t}-1}{t\,(1+t)}\, dt$ (5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(1+t)^{1/3}-1}{t\,(1+t)^{2/3}}\, dt$ (6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t-t^2}}\, dt$

(7) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^t+1)\,(e^{-t}+1)}\, dt$ (8) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\arctan\left(x^2\right) dx$ (9) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x)\, e^{-x}\, dx$

(10) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}\, dx$ (11) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$ (12) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\, dt$

(13) $\displaystyle\int_0^1 x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor dx$ (14) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lfloor x\rfloor\, e^{-x}\, dx$ (15) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\text{ch}^2(t)}\, dt$

`convergenceValeurIntegrale` [indication(s)]

Exercice 6 ★☆☆ — *On considère les deux intégrales. Justifier la convergence des intégrales*

$$I := \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\, dt \qquad \text{et} \qquad J := \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))\, dt.$$

1. *Démontrer que les intégrales I et J convergent.*
2. *En déduire les valeurs de $I+J$ et $I-J$, puis celles de I et J.*

`integraleCompositionSinusParLnAvecCombinaison`

Exercice 7 ★★★ — *Soit la fonction*

$$f : x \longmapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$$

1. *Justifier que la fonction f est bien définie, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et calculer sa dérivée.*
2. *Démontrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$, puis calculer sa valeur.*

`queueIntegraleSinusCardinal` [indication(s)]

Exercice 8 ★☆☆ — *Étudier l'intégrabilité de la fonction :*

$$f \left| \begin{array}{ccc}]0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_x^1 \frac{e^t}{t}\, dt \end{array}\right.$$

sur l'intervalle $]0,1]$.

`integrabiliteQueueIntegrale`

Exercice 9 ★☆☆ — *Soit $a>0$. Démontrer que l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}\, dt$ *converge et calculer sa valeur. On pourra commencer par considérer le cas où $a=1$.*

`convergenceValeurIntegraleAvecParametre`

Exercice 10 ★★☆ — *Soient α, β, λ des réels. Étudier la nature de chacune des intégrales suivantes.*

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha\, e^{-\lambda x^\beta}\, dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha\left(e^{\beta x}-1\right) dx$ (3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^\alpha}{1-t^\beta}\, dt$

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}\, dx$ (5) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln(x)^\beta}\, dx$ (6) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{x^\alpha(-\ln(x))^\beta}\, dx$

(7) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha(1-t)^\beta}\, dt$ (8) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^\beta}\, dt$ (9) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin(t)}{t^\alpha}\, dt$

(10) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{x}{1-e^{-x}}\right)\frac{e^{-\alpha x}}{x}\, dx$

`natureIntegraleAvecParametre`

Exercice 11 ★★☆ — *Soit* $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ *tel que* $a^2 - 4b < 0$. *Établir l'existence de l'intégrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + at + b} \, \mathrm{d}t$$

et calculer sa valeur. On pourra s'aider de la symétrie axiale de la courbe représentative de l'intégrande.

`integraleInversePolynomeDegreDeux`

Exercice 12 ★★☆ — *Soient* $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}^+, \mathbf{R})$ *et* $a > 0$. *On suppose que l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-at}\, \mathrm{d}t$ *converge. Démontrer que pour tout* $x > a$, *l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-xt}\, \mathrm{d}t$ *converge.*

`abscisseConvergenceTransformeeLaplace`

Exercice 13 ★★☆ — *Notons* $I := \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\, \mathrm{d}t$.

1. *Justifier l'existence de* I.
2. *Démontrer que* $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}}{t}\, \mathrm{d}t$.
3. *Démontrer que* $I = \displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t$.
4. *Donner la valeur de* I.

`differenceDeuxExponentiellesFoisInverse`

Exercice 14 ★★☆ — *Soit un entier* $n \geqslant 2$.

1. *Déterminer les racines du polynôme* $X^{n-1} + \ldots + X + 1$.
2. *En déduire que* $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.
3. *En déduire la valeur de* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x))\, \mathrm{d}x$.

`integraleCompositionSinusParLnAvecPolynomes`

Exercice 15 ★★☆ — *Soient* $a > 0$, $b > 0$ *et* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *les suites réelles définies par* $u_0 := a > 0$, $v_0 := b > 0$ *et, pour tout* $n \in \mathbf{N}$:

$$u_{n+1} := \frac{u_n + v_n}{2} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$

1. *Démontrer que* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *convergent vers la même limite* $M(a,b)$.
2. *Justifier l'existence de* $I(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2+t^2}\,\sqrt{b^2+t^2}}\, \mathrm{d}t$.
3. *Démontrer que* $I(a,b) = \dfrac{1}{a}\, I\left(1, \dfrac{b}{a}\right)$.
4. *Montrer que l'application*

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\left(t - \dfrac{ab}{t}\right) \end{array} \right.$$

   est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ *dont l'application réciproque est également de classe* $\mathcal{C}^1$.
5. *Effectuer un changement de variable à l'aide de l'application* φ, *pour relier* $I(a,b)$ *et* $I\left(\dfrac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right)$.
6. *Relier enfin* $I(a,b)$ *et* $M(a,b)$.

moyenneArithmeticoGeometrique

Exercice 16 ★★☆ — *Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ telle que f et f'' soient intégrables. Démontrer que $f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.*

fonctionEtDeriveeSecondeIntegrables [indication(s)]

Exercice 17 ★★☆ — *Étudier la convergence des intégrales*

$$\int_0^{+\infty} t\,\cos(t)\ \mathrm{d}t \qquad et \qquad \int_0^{+\infty} t\,\cos^2(t)\ \mathrm{d}t$$

Plus généralement, étudier la convergence d'une intégrale de la forme $\int_0^{+\infty} t\,P(\cos(t))\ \mathrm{d}t$, où P est un polynôme à coefficients réels.

identiteFoisPolynomeEnCosinus

Exercice 18 ★★☆ — *Le but de cet exercice est de calculer la valeur de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t$. Pour chaque entier n, on note :*

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin t}\ \mathrm{d}t \qquad et \qquad J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t}\ \mathrm{d}t.$$

1. *Justifier que, pour tout $n \geqslant 0$, I_n et J_n sont bien définis.*
2. *Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $I_n - I_{n-1} = 0$. En déduire la valeur de I_n.*
3. *Soit $\phi\colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Démontrer que*

$$\int_0^{\pi/2} \phi(t)\sin\big((2n+1)t\big)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad [\textit{lemme de Riemann-Lebesgue}]$$

4. *Démontrer que la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.*
5. *En déduire que $J_n - I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.*
6. *Démontrer, en utilisant un changement de variables, que $J_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} I$.*
7. *En déduire que $I = \frac{\pi}{2}$.*

integraleDirichlet

Exercice 19 ★★☆ — *Le but de cet exercice est de calculer la valeur de $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ \mathrm{d}t$.*

1. *Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, pour tout $t \in \left]0, \sqrt{n}\right]$*

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2} \leqslant \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$$

2. *En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$*

$$\sqrt{n}\,W_{2n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\ \mathrm{d}t \leqslant \sqrt{n}\,W_{2n-2}$$

   où, pour tout $p \in \mathbf{N}$, $W_p := \int_0^{\pi/2} \sin^p(t)\ \mathrm{d}t$.

3. *Déterminer une récurrence entre W_{n+2} et W_n ($n \in \mathbf{N}$), établir que la suite $\big((n+1)\,W_n\,W_{n+1}\big)_{n\in\mathbf{N}}$ est constante et en déduire que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.*
4. *En déduire que $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.*

integraleGauss

Exercice 20 ★★★ — *Soient a un réel et f une application continue de $[a,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, intégrable sur $[a,+\infty[$.*

1. *Démontrer que si f admet une limite en $+\infty$, cette limite est nécessairement nulle.*
2. *Démontrer que si f est uniformément continue, alors elle tend vers 0 en $+\infty$.*
3. *Le résultat de la question 2 subsiste-t-il si on suppose simplement f continue ?*

`fonctionUniformementContinueIntegrable` [corrigé]

Exercice 21 ★★★ — *Soit $f \in \mathcal{CM}\left([0,+\infty[,\mathbf{R}\right)$ une fonction intégrable. Démontrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de réels convergeant vers $+\infty$ telle que*

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad x_n f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

`fonctionIntegrableVersusFonctionInverse`

Exercice 22 ★★★ — *Pour tout $a \in \mathbf{C}$, on note $I(a) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \ln\left(\left|\mathrm{e}^{it} - a\right|\right)\,\mathrm{d}t$.*

1. *Démontrer l'existence de $I(0)$ et donner sa valeur.*
2. *Démontrer l'existence de $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t$ et en déduire l'existence de $I(1)$.*
3. *Démontrer que, pour tout $a \in \mathbf{C}$, $I(a)$ existe et que $I(a) = I(|a|)$.*
4. *Soit un polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ non nul. Démonter que le nombre*
$$M(P) = \int_0^{2\pi} \ln\left(\left|P\left(\mathrm{e}^{it}\right)\right|\right)\,\mathrm{d}t \qquad [\textit{mesure de Mahler de } P]$$
est bien défini.
5. *Démontrer que, pour tout $b > 0$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $M\left(X^n - b^n\right) = n\,M(X-b)$.*
6. *Déterminer la valeur de $M(X-b)$, pour tout $b \in]0,1[$, puis, pour tout $b > 1$.*
7. *Calculer $M(X-1)$.*
8. *Soit $a \in \mathbf{C}^*$, $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbf{C}$ et $P = a\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k)$. Démontrer que $M(P) = |a|\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\max\{1,|\alpha_k|\}$.*

`mesureMahlerPolynome`

Exercice 23 ★★★ — *Soit $f \in \mathcal{CM}\left([0,+\infty[,\mathbf{R}\right)$ une fonction positive, décroissante et intégrable sur $[0,+\infty[$. Démontrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.*

`fonctionIntegrablePositiveDecroissante`

Exercice 24 ★★★ — *Soient $f \in \mathcal{C}^0\left([0,+\infty[,\mathbf{R}\right)$ une fonction positive et décroissante. Posons*

$$g \left| \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x)\,\sin(x) \end{array} \right.$$

Démontrer que f est intégrable si et seulement si g est intégrable.

`fonctionPositiveDecroissanteFoisSinus`

---

integrabiliteNiveau1 [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 1

1. La fonction $f\colon t \longmapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
   - En 0^+ : déterminer un équivalent simple de $f(t)$ et appliquer les résultats du cours sur les intégrales de Riemann.
   - En $+\infty$: appliquer la règle t^α.
2. La fonction $f\colon t \longmapsto \ln(t)\ \mathrm{e}^{-t}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
   - En 0^+ : déterminer un équivalent simple de $f(t)$ et primitiver.
   - En $+\infty$: appliquer la règle t^α.
3. La fonction $f\colon t \longmapsto \dfrac{\sin^3(t)}{t^2}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
   - En 0^+ : prolonger la fonction f par continuité.
   - En $+\infty$: appliquer le théorème de domination pour les intégrales de fonctions positives et appliquer les résultats du cours sur les intégrales de Riemann.
4. La fonction $f\colon t \longmapsto \dfrac{\arctan\left(t^2+1\right)}{t^2+1}$ est continue par morceaux sur $[1,+\infty[$.
   - En $+\infty$: déterminer un équivalent simple de $f(t)$ et appliquer les résultats du cours sur les intégrales de Riemann.
5. La fonction $f\colon t \longmapsto \arctan\left(\sin\left(\dfrac{1}{t^2}\right)\right)$ est continue par morceaux sur $[1,+\infty[$.
   - En $+\infty$: déterminer un équivalent simple de $f(t)$ et appliquer les résultats du cours sur les intégrales de Riemann.
6. La fonction $f\colon u \longmapsto \dfrac{\ln(u)}{u^2+1}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
   - En 0^+ : déterminer un équivalent simple de $f(u)$ et primitiver ln.
   - En $+\infty$: appliquer la règle u^α.
7. La fonction $f\colon t \longmapsto \dfrac{1}{(1-t)\sqrt{t}}$ est continue par morceaux sur $]0,1[$.
   - En 0^+ : déterminer un équivalent simple de $f(t)$ et appliquer les résultats du cours sur les intégrales de Riemann.
   - En 1^- : déterminer un équivalent simple de $f(t)$ et appliquer les résultats du cours sur les intégrales de Riemann.
8. La fonction $f\colon t \longmapsto \dfrac{1}{t^{3/2}}\sqrt{\sin\left(t^2\right)}$ est continue par morceaux sur $]0,1]$.
   - En 0^+ : déterminer un équivalent simple de $f(t)$ et appliquer les résultats du cours sur les intégrales de Riemann.
9. La fonction $f\colon t \longmapsto \dfrac{1}{(1-t)\sqrt{t}}$ est continue par morceaux sur $]0,1[$.
   - En 0^+ : déterminer un équivalent simple de $f(t)$ et primitiver.
   - En 1^- : appliquer le changement de variable $u=1-t$.
10. La fonction $f\colon t \longmapsto \mathrm{e}^{-\ 1/t^2}$ est continue par morceaux sur $]0,1]$.
    - En 0^+ : appliquer le changement de variable $u=\dfrac{1}{t}$ et la règle t^α.
11. La fonction $f\colon t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}\ \mathrm{e}^{-1/t}\sin\left(\dfrac{1}{t}\right)$ est continue par morceaux sur $]0,1]$.
    - En 0^+ : appliquer le changement de variable $u=\dfrac{1}{t}$ et le théorème de domination pour les intégrales de fonctions positives
12. La fonction $f\colon x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x-1}}$ est continue par morceaux sur $]1,+\infty[$.
    - En 1^+ : déterminer un équivalent simple de $f(t)$ et appliquer les résultats du cours sur les intégrales de Riemann.
    - En $+\infty$: appliquer la règle x^α.
13. La fonction $f\colon x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x-1}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
    - En 0^+ : prolonger la fonction f par continuité.
    - En $+\infty$: pour tout $t\in\mathbf{R}$, $\dfrac{\sin^2(t)}{t}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{\cos(2t)}{t}\right)$

integrabiliteNiveau2 [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 2

1. La fonction $f\colon t \longmapsto t\left(\dfrac{1}{t} - \sin\left(\dfrac{1}{t}\right)\right)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
   - En $+\infty$: déterminer un équivalent simple de $f(t)$ et appliquer les résultats du cours sur les intégrales de Riemann.
   - En 0^+ : appliquer le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$, chercher un équivalent de la nouvelle intégrande en $+\infty$ et appliquer les résultats du cours sur les intégrales de Riemann.
2. La fonction $f\colon t \longmapsto t\,\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}$ est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$.
   - En $+\infty$: appliquer le changement de variable $u = \sqrt{t}$, puis la règle t^α.
3. La fonction $f\colon x \longmapsto \dfrac{1}{x^x} = e^{-x\ln(x)}$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
   - En 0^+ : prolonger la fonction f par continuité.
   - En $+\infty$: dominer f par la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ sur un voisinage de $+\infty$ à déterminer et appliquer les résultats du cours sur les intégrales de Riemann.
4. La fonction $f\colon t \longmapsto \dfrac{\ln(\sin(t))}{t}$ est continue par morceaux sur $]0, 1]$.
   - En 0^+ : démontrer $f(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{\ln(t)}{t}$ et primitiver.
5. La fonction $f\colon t \longmapsto \mathrm{e}^{1/\sqrt{t}}$ est continue par morceaux sur $]0, 1]$.
   - En 0^+ : appliquer le changement de variable $u = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et la règle t^α.
6. La fonction $f\colon t \longmapsto \mathrm{e}^{-t\arctan(t)}$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
   - En $+\infty$: comparer la fonction f à $t \longmapsto e^{-\lambda t}$, où λ est un réel strictement positif à déterminer.

integrabiliteNiveau3 [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 3

1. La fonction $f\colon t \longmapsto \dfrac{1}{t}\sin\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right)\right)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
   - En $+\infty$: déterminer un équivalent simple de $f(t)$ et appliquer les résultats du cours sur les intégrales de Riemann.
   - En 0^+ : remarquer que, si f est intégrable au voisinage de 0^+, alors la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2+t}\sin\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right)\right)$, l'est aussi (théorème de domination pour les intégrales de fonctions positives). Penser alors au changement de variable $u = \ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right)$.
2. La fonction $f\colon t \longmapsto \mathrm{e}^{\sin(t)}$ est continue par morceaux sur $[1,+\infty[$.
   - En $+\infty$: par 2π-périodicité de la fonction sinus, $\displaystyle\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \mathrm{e}^{\sin(t)}\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\sin(t)}\ \mathrm{d}t$
3. La fonction $f\colon t \longmapsto \mathrm{e}^{1/\sqrt{-\ln(t)}}$ est continue par morceaux sur $]0,1[$.
   - En 0^+ : pronlonger la fonction f par continuité.
   - En 1^- : appliquer le changement de variable $u = \dfrac{1}{\sqrt{-\ln(t)}}$ et le théorème de domination pour les intégrales de fonctions positives
4. La fonction $f\colon t \longmapsto \dfrac{\sqrt{-\ln(t)}}{t^{3/2}}$ est continue par morceaux sur $]0,1]$.
   - En 0^+ : appliquer la règle t^α.
5. La fonction $f\colon t \longmapsto \mathrm{e}^{-t\,\sin(t)}$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
   - En $+\infty$: par 2π-périodicité de la fonction sinus, $\displaystyle\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \mathrm{e}^{-t\sin(t)}\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-t\sin(t)}\ \left(\mathrm{e}^{-2\pi\sin(t)}\right)^k\ \mathrm{d}t$ et la fonction sinus est majorée par $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sur $\left[\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{7\pi}{4}\right]$.
6. La fonction $f\colon t \longmapsto (t+1)^{\frac{1}{t+1}} - 1 - \frac{\ln(t)}{t}$ est continue par morceaux sur $[1,+\infty[$.
   - En $+\infty$: calculer un développement asymptotique de $f(t)$ et appliquer la règle t^α.

convergenceValeurIntegrale [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 5

1. La fonction $f\colon t \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
   Appliquer le changement de variable $u=\sqrt{t}$.
2. La fonction $f\colon t \longmapsto \sin(t)\,\ln(\sin(t))$ est continue par morceaux sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
   Appliquer le changement de variable $u=\cos t$.
3. La fonction $f\colon t \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}$ est continue par morceaux sur $]0,1[$.
   Appliquer le changement de variable $u=\sqrt{1-t}$.
4. La fonction $f\colon t \longmapsto \dfrac{\sqrt{1+t}-1}{t\,(1+t)}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
   Appliquer le changement de variable $u=\sqrt{1+t}$.
5. La fonction $f\colon t \longmapsto \dfrac{(1+t)^{1/3}-1}{t\,(1+t)^{2/3}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
   Appliquer le changement de variable $u=(1+t)^{1/3}$.
6. La fonction $f\colon t \longmapsto \dfrac{t}{\sqrt{t-t^2}}$ est continue par morceaux sur $]0,1[$.
   Appliquer le changement de variable $u=\sqrt{1-t}$, puis le changement de variable $x=\cos(u)$.
7. La fonction $f\colon t \longmapsto \dfrac{1}{(\mathrm{e}^{t}+1)\,(\mathrm{e}^{-t}+1)}$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
   Appliquer le changement de variable $u=\mathrm{e}^{t}$.
8. La fonction $f\colon x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}\,\arctan\left(x^2\right)$ est continue par morceaux sur $[1,+\infty[$.
   Effectuer une intégration par parties, en primitivant $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ et en dérivant $x \longmapsto \arctan\left(x^2\right)$.
9. La fonction $f\colon x \longmapsto \cos(x)\,\mathrm{e}^{-x}$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
   Remarquer que, pour tout réel x, $\cos(x)=\mathrm{Re}\left(e^{ix}\right)$. On peut aussi effectuer deux intégrations par parties.
10. La fonction $f\colon x \longmapsto \dfrac{x\,\ln(x)}{\left(1+x^2\right)^2}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
    Effectuer une intégration par parties, en primitivant $x \longmapsto \dfrac{x}{\left(1+x^2\right)^2}$ et en dérivant $x \longmapsto \ln(x)$.
11. La fonction $f\colon x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}\,\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
    Appliquer le changement de variable $u=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
12. La fonction $f\colon t \longmapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
    Appliquer le changement de variable $u=\mathrm{e}^{t}$.
13. La fonction $f\colon x \longmapsto x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$ est continue par morceaux sur $]0,1]$.
    Appliquer le changement de variable $u=\dfrac{1}{x}$ et calculer, pour tout $k\in\mathbf{N}^*$, $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{\lfloor u\rfloor}{u^3}\,\mathrm{d}u$.
14. La fonction $f\colon x \longmapsto \lfloor x\rfloor\,\mathrm{e}^{-x}$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
    Calculer, pour tout $k\in\mathbf{N}^*$, $\displaystyle\int_k^{k+1}\lfloor x\rfloor\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ et, pour tout $x\in[0,1[$, la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}k\,x^k$, en prenant appui sur la formule donnant la somme de termes en progression géométrique.
15. La fonction $f\colon t \longmapsto \dfrac{t}{\mathrm{ch}^2(t)}$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
    Appliquer le changement de variable $u=e^{2t}$, puis appliquer le théorème d'intégration par parties, en primitivant $u \longmapsto \dfrac{u}{(u^2+1)^2}$ et en dérivant $u \longmapsto \ln(u)$.

`queueIntegraleSinusCardinal` [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 7

1. • *Caractère bien défini de la fonction f.* Il suffit de démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{d}t$ converge.

— La fonction

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{\sin(t)}{t} \end{array} \right.$$

est continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

— En appliquant le théorème d'intégration par parties avec les fonctions

$$u\colon t \longmapsto \frac{1}{t} \qquad \text{et} \qquad v\colon t \longmapsto 1-\cos(t)$$

toutes deux de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$, justifier que les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\ \mathrm{d}t$$

ont même nature. Établir ensuite la convergence de la deuxième.

• *Régularité $\mathcal{C}^1$ de la fonction f et dérivée.* La fonction φ se prolonge en une fonction

$$\widetilde{\varphi} \left| \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \varphi(t) & \text{si } t>0 \\ 1 & \text{si } t=0 \end{cases} \end{array} \right.$$

continue sur $[0,+\infty[$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $\widetilde{\varphi}$ possède une primitive $\widetilde{\Phi}$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$, que nous pouvons supposer nulle en 0. Alors, pour tout $x \in [0,+\infty[$

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \varphi(t)\ \mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} \widetilde{\varphi}(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \widetilde{\varphi}(t)\ \mathrm{d}t - \int_0^{x} \widetilde{\varphi}(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \widetilde{\varphi}(t)\ \mathrm{d}t - \widetilde{\Phi}(x)$$

2. • La fonction f étant continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x$ présente une unique singularité, située en $+\infty$.

• Soit $A>0$. Justifier

$$\int_0^A f(x)\ \mathrm{d}x = A\,f(A) + 1 - \cos(A)$$

On va appliquer plusieurs fois le théorème d'intégration par parties pour accélérer la convergence et déterminer le comportement asymtotique de $A\,f(A)$ lorsque A tend vers $+\infty$. Le délicat théorème d'intégration des O nous apportera de l'aide, en toute fin d'étude.

• Justifier

$$f(A) = \frac{\cos(A)-1}{A} + \int_A^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\ \mathrm{d}t$$

• Justifier

$$\int_A^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\ \mathrm{d}t \underset{A\to+\infty}{=} \frac{\sin(A)-A}{A^2} + \frac{2}{A} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{A^2}\right)$$

• En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x$ converge et vaut 1.

fonctionEtDeriveeSecondeIntegrables [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 16

- Du théorème fondamental de l'analyse et de l'intégrabilité de f'', nous déduisons

$$\exists\, \ell \in \mathbf{R} \quad f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$$

- Établir que $\ell = 0$, en raisonnant par l'absurde. En supposant $\ell \neq 0$ et même $\ell > 0$ (quitte à remplacer f par $-f$), démontrer

$$\exists\, a \geqslant 0 \quad \forall\, x \geqslant a \quad f(x) \geqslant \frac{\ell}{2}\,(x-a) + f(a)$$

  et obtenir une contradiction.

- Justifier alors que, pour tout $x \geqslant 0$

$$\int_0^{x+1} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t + f(x) + \int_x^{x+1} (x+1-t)\, f'(t)\ \mathrm{d}t$$

  et conclure.

`fonctionUniformementContinueIntegrable` [énoncé]

Un corrigé de l'exercice 20

1. Supposons qu'il existe $\ell \in \mathbf{R}^*$ telle que
$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$$
et cherchons une contradiction. Quitte à remplacer f par $-f$, nous pouvons supposer $\ell > 0$. D'après la définition de la limite
$$\exists\, b \geqslant a \quad \forall\, x \geqslant b \quad |f(x) - \ell| \leqslant \frac{\ell}{2}$$
Nous en déduisons
$$\forall\, x \geqslant b \quad f(x) \geqslant \frac{\ell}{2}$$
puis
$$\forall\, B \geqslant b \quad \int_b^B f(x)\ \mathrm{d}x \geqslant \int_b^B \frac{\ell}{2}\ \mathrm{d}x = \frac{\ell\,(B-b)}{2} \xrightarrow[B \to +\infty]{} +\infty$$
ce qui contredit l'intégrabilité de f.
2. Supposons l'application f uniformément continue sur $[a, +\infty[$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $f(x)$ ne tende pas vers 0, lorsque x tend vers $+\infty$, i.e.
$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, b \geqslant a \quad \exists\, x_b \geqslant b \quad |f(x_b)| \geqslant \varepsilon$$
L'uniforme continuité de f sur $[a, +\infty[$ nous livre
$$\exists\, \alpha > 0 \quad \forall\, (x,y) \in [a, +\infty[^2 \quad |x-y| \leqslant \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$
Soit un entier $n \geqslant \lfloor a \rfloor + 1 > a$. Alors
$$\forall\, t \in [x_n, x_n + \alpha] \quad |f(t)| \geqslant \underbrace{|f(x_n)|}_{\geqslant \varepsilon} - \underbrace{|f(x_n) - f(t)|}_{\leqslant \varepsilon/2} \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$$
d'où
$$\int_{x_n}^{+\infty} |f(t)|\ \mathrm{d}t \geqslant \int_{x_n}^{x_n+\alpha} |f(t)|\ \mathrm{d}t \geqslant \int_{x_n}^{x_n+\alpha} \frac{\varepsilon}{2}\ \mathrm{d}t = \frac{\varepsilon\,\alpha}{2}$$
Comme $x_n \geqslant n$ et f est intégrable
$$\int_{x_n}^{+\infty} |f(t)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$
Contradiction.
3. Non, cf. exemple 93 du polycopié de cours « Intégration sur un intervalle quelconque »pour un contre-exemple.