Exercice 18 :

$$f \left| \begin{array}{ccc}]-1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} t^x \, dt \end{array} \right.$$

$$g \left| \begin{array}{ccc}]-1;+\infty[\times]0;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \displaystyle\frac{t-1}{\ln(t)} t^x \end{array} \right.$$

Q1) Montrons que f est bien définie et $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$ et calculons f' :

Soit $x > -1$,

- $g(x,\cdot)$ est continue par morceau sur $]0;1[$.

- $|g(x,t)| \underset{t\to 0^+}{=} o\Big(\frac{1}{\underbrace{t^{-x}}_{\geq 0}}\Big)$

où $t \longmapsto \frac{1}{t^{-x}}$ est intégrable en 0^+

d'après le critère de Riemann.

Donc d'après le théorème d'intégration des relation de domination : $g(x, \cdot)$ est intégrable en 0^+.

$$\frac{\ln(t) - \ln(1)}{t - 1} \xrightarrow[t \to 1^-]{} 1$$

donc $|g(x, t)| \xrightarrow[t \to 1^-]{} 1$.

Donc $g(x, \cdot)$ est intégrable en 1^- car prolongeable par continuité.

Ainsi, f est bien définie.

Caractère $\mathcal{C}^1$ de f :

(H1) : $t \in]0;1[$ fixé.

$g(\cdot, t)$ $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$:

$\forall x \in]-1;+\infty[$, $\frac{\partial}{\partial x} g(x, t) = (t-1)t^x$.

(H2) : $x > -1$ fixé.

$g(x, \cdot)$ continue par morceau sur $]0;1[$,
et $\frac{\partial}{\partial x} g(x, \cdot)$ continue par morceau sur $]0;1[$.

(H3) : $x > -1$ fixé,

$g(x, \cdot)$ est intégrable sur $]0;1[$
(d'après (φ_1)).

(H4) : Soit $a > -1$, $x \in [a; +\infty[$,
$t \in]0;1[$,

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} g(x,t)\right| \leq t^{x+1} + t^{x}$$

$a \leq x$: $\ln(t)a \geq \ln(t)x$ $(\ln(t) \leq 0)$

donc $t^{x} \leq t^{a}$

Donc $\left|\frac{\partial}{\partial x} g(x,t)\right| \leq t^{a+1} + t^{a} =: \varphi_a(t)$

où φ_a est continue par morceaux sur $]0;1[$.

φ_a est intégrable en 1^{-} car prolongeable par continuité.

$$|\varphi_a(t)| \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{t^{-a}} \geq 0$$

Donc φ_a est intégrable en 0^{+}.

Ainsi le critère C^1 s'applique et nous livre :

- $\forall x \in]-1;+\infty[$, $\frac{\partial}{\partial x} g(x,\cdot)$ est intégrable sur $]-1;+\infty[$

- f est C^1 sur $]-1;+\infty[$ et :

$$\forall x \in]-1;+\infty[, \quad f'(x) = \int_0^1 t^{x+1} - t^x \, dt$$
$$= \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}.$$

Q2) Déduisons-en une expression de $f(x)$:

D'après le théorème fondamental de l'analyse :

$$\forall x \in]-1;+\infty[, \quad f(x) = f(0) + \int_0^x \frac{1}{t+2} - \frac{1}{t+1} \, dt$$

Donc $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in]-1;+\infty[$,

$$f(x) = C + \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right).$$

Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$:

(H1): $x \in [0;+\infty[$ fixé,

$g(x,\cdot)$ est continue par morceau sur $]0;1[$.

(H2) : $t \in]0;1[$ fixé,

$$g(x,t) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

(H3) : Soit $x \in [0;+\infty[$, $t \in]0;1[$,

$$|g(x,t)| \leq |g(0,t)|$$

or $g(0,\cdot)$ est intégrable sur $]0;1[$.

Donc d'après le théorème de convergence dominée :

$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \int_0^1 0 \, dt = 0.$$

Comme $\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$,

on a donc $c = 0$.

Donc $\forall x \in]-1;+\infty[$, $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$.

polycopié de cours

Exercice 25 : Soit $a > 1$.

Montrons que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^a}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{an+1}$:

On sait que :

$$\forall t \in]-1;1[, \quad \frac{1}{1+t^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{an}(-1)^n$$

$$(t^a \in]-1;1[\text{ car } a > 1)$$

$t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^a}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $[0;1]$, donc :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^a}\,dt \text{ existe.}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^a}\,dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{an}\,dt$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [0;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (-1)^n t^{an} \end{array} \right.$$

et $$S_n \left| \begin{array}{ccc} [0;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(t) \end{array} \right.$$

Appliquons le théorème de convergence dominée :

(H1) : $\forall n \in \mathbb{N}$, S_n est continue par morceau sur $[0;1[$.

(H2) : $\forall t \in [0;1[$,

$$S_n(t) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{1+t^a}$$

Donc $S_n \xrightarrow[{[0;1[}]{CS} S \left| \begin{array}{ccc} [0;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{1}{1+t^a} \end{array} \right.$

avec S, continue par morceau sur $[0;1[$.

(H3) : Soit $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0;1[$,

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-t^a)^k$$

où $-t^a \in]-1;1[$:

$$= \frac{1-(-t^a)^{n+1}}{1+t^a}$$

donc $|S_n(t)| \leq \frac{2}{1} = 2 =: \varphi(t)$

où φ est intégrable sur $[0;1[$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est intégrable sur $[0;1[$, et :

$$\int_0^1 S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 S.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 S_n = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^k t^{ak} dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{1}{ak+1}$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{ak+1}$$

Donc par unicité de la limite :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^a} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{an+1}.$$

Exercice 14 :

Montrons que $\int_0^1 x^{-x}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$:

On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

or, si $x \in]0;1]$, $-x\ln(x) \in \mathbb{R}$,

donc $x^{-x} = e^{-x\ln(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^n \ln(x)^n}{n!}$.

Appliquons le théorème d'intégration terme à terme de Lebesgue dans le cas positif :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc}]0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^n \ln(x)^n \end{array} \right.$$

(H1) : $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceau sur $]0;1]$,

et $|f_n(x)| \underset{0^+}{=} o(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{\geq 0})$

où $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable en 0^+

d'après le critère de Riemann.

Donc d'après le théorème d'intégration des relations de comparaison, f_n est intégrable en 0^+.

(H2) : $\sum f_n$ converge simplement sur $]0;1]$ et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \left| \begin{array}{l}]0;1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^{-x} \end{array} \right.$$ est continue

par morceau sur $]0;1]$.

Le théorème nous livre alors :

$$\int_0^1 x^{-x}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n}{n!} x^n \ln(x)^n\,dx.$$

Soit $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$,

$$I_{p,q} := \int_0^1 \underbrace{x^p \ln(x)^q}_{\underset{0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} dx$$

$u : x \longmapsto \frac{1}{p+1} x^{p+1}$,

$v : x \longmapsto \ln(x)^q$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $]0;1]$.

$\forall x \in]0;1]$, $u(x) \cdot v(x)$

$$= \frac{1}{p+1} x^{p+1} \cdot \ln(x)^q$$

$$\xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$$

et $u(1) \cdot v(1) = 0$.

Donc par le théorème d'intégration par partie,

$$I_{p,q} \text{ et } \int_0^1 \frac{1}{p+1} x^{p+1} \cdot \frac{1}{x} \cdot q \cdot \ln(x)^{q-1} \, dx$$

ont même nature. Puisque $I_{p,q}$ converge :

$$I_{p,q} = u(1) \cdot v(1) - \lim_{x \to 0^+} (u(x) \cdot v(x))$$
$$- \int_0^1 \frac{q}{p+1} \cdot x^p \cdot \ln(x)^{q-1} \, dx$$

$$= -\frac{q}{p+1} \cdot I_{p,q-1}$$

De plus, si $p \in \mathbb{N}$,

$$I_{p,0} = \int_0^1 x^p \, dx = \frac{1}{p+1}$$

donc après une récurrence <u>à rédiger</u>, on trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n,n} = (-1)^n \cdot \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$$

Ainsi, $$\int_0^1 x^{-x}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot I_{n,n}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$$

Exercice 27 : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$,
$d = \deg(P) \geq 1$.

On suppose que P n'a aucune racine dans $\mathbb{C}$.

$$F \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ r & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{P(re^{i\theta})} d\theta \end{array} \right.$$

Q1) Montrons que F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$:

On pose $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ \times [0; 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (r, \theta) & \longmapsto & \frac{1}{P(re^{i\theta})} \end{array} \right.$.

(H1) : Soit $\theta \in [0; 2\pi]$ fixé,

$f(\cdot, \theta)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$:

$$\forall r \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{\partial}{\partial r} f(r, \theta) = \frac{-e^{i\theta} \times P'(re^{i\theta})}{P(re^{i\theta})^2}$$

(H2) : Soit $r \in [0; +\infty[$ fixé,

$f(r, \cdot)$ et $\frac{\partial}{\partial r} f(r, \cdot)$ sont $\mathcal{C}^0$ sur $[0; 2\pi]$.

(H3) : Soit $r \in \mathbb{R}_+$ fixé,

$f(r, \cdot)$ est intégrable sur $[0; 2\pi]$ car continue.

(H4) : Soit $a > 0$,

$K = [0, a] \times [0, 2\pi]$ est compacte comme produit de deux compactes.

$(r, \theta) \longmapsto \left| \frac{P'(re^{i\theta})}{P(re^{i\theta})^2} \right|$ $\mathcal{C}^0$ sur K.

D'après le théorème des bornes atteintes :

$\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall (r, \theta) \in K,$

$\left| \frac{\partial}{\partial r} f(r, \theta) \right| \leq M =: \varphi(\theta)$

φ est intégrable sur $[0; 2\pi]$ car constante.

Ainsi, le critère $\mathcal{C}^1$ s'applique :

- F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$
- $\forall r \in \mathbb{R}_+, \frac{\partial}{\partial r} f(r, \cdot)$ est intégrable sur $[0, 2\pi]$.

$\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \; F'(r) = \int_0^{2\pi} -\frac{ir}{ir} \cdot \frac{e^{i\theta} \times P'(re^{i\theta})}{P(re^{i\theta})^2} d\theta$

(12) Montrons que I est constante :

$$\frac{\partial}{\partial\theta} f(r,\theta) = -\frac{ir e^{i\theta} P'(re^{i\theta})}{P(re^{i\theta})^2}.$$

Donc si $r>0$, $I'(r) = \frac{1}{ir} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial\theta} f(r,\theta)\, d\theta$

$$= \frac{1}{ir} \left[f(r,\theta) \right]_0^{2\pi}$$

$$= 0$$

Donc par continuité de I', $I'(0) = 0$.

Comme $\mathbb{R}_+$ est un intervalle, I est constante sur $\mathbb{R}_+$.

__Rappel :__ $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$,

où $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{C}$.

Soit $z \in \mathbb{C}$,

$$|P(z)| \geqslant |a_d||z|^d - \left|\sum_{k=0}^{d-1} a_k z^k\right|$$

$$\geqslant \underbrace{|a_d||z|^d - \sum_{k=0}^{d-1} |a_k||z|^k}_{g(|z|)}$$

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |a_d|x^d - \sum_{k=0}^{d-1} |a_k|x^k \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \end{array} \right.$$

__Lemme 1 :__ Soit $\Theta \in [0; 2\pi]$ fixé,

$\exists A \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \geqslant A,\ g(x) \geqslant 1.$

$\forall r \geqslant A,\ |P(re^{i\Theta})| \geqslant g(r) \geqslant 1$

donc $0 \leqslant \dfrac{1}{|P(re^{i\Theta})|} \leqslant \dfrac{1}{g(r)} \xrightarrow[r \to +\infty]{} 0$

donc $f(r, \Theta) \xrightarrow[r \to +\infty]{} 0$.

Lemme 2 :

- On sait que :

$\forall (r, \theta) \in [1, +\infty[\times [0; 2\pi], \; |f(r, \theta)| \leq 1$

- $K' = [0; 1] \times [0; 2\pi]$ compacte.

f est $\mathcal{C}^0$ sur K'.

Donc d'après le théorème des bornes atteintes :

$\exists M' \in \mathbb{R}_+, \; \forall (r, \theta) \in K', \; |f(r, \theta)| \leq M'$

$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0; 2\pi], \; |f(r, \theta)| \leq M' + 1$

Q3) Montrons que $I(r) \xrightarrow[r \to +\infty]{} 0$:

Appliquons la version continue du théorème de convergence dominée :

(H1) : Si $r \in \mathbb{R}_+$ fixé, $f(r, \cdot)$ continue par morceaux sur $[0; 2\pi]$.

(H2) : Si $\theta \in \mathbb{R}_+$, $f(r, \theta) \xrightarrow[r \to +\infty]{\text{lemme 1}} 0$,

où $x \mapsto 0$ continue par morceaux.

(H3) : $\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0; 2\pi]$.

Comme 2 : $|f(r, \theta)| \leq 1 + \Pi' =: \varphi(\theta)$

où $\varphi(\theta)$ intégrable sur $[0; 2\pi]$.

Donc le théorème s'applique et livre :

$I(r) \xrightarrow[r \to +\infty]{} 0$.

Ainsi, $\forall r \in \mathbb{R}_+$, $I(r) = 0$.

Donc $0 = \dfrac{2\pi}{P(0)}$ $\lightning$.