TD Correction

Exercice 19 (Cours)

- $\zeta(x) - 1 = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$

Posons $\forall n \geq 2$, $f_n : \left| \begin{array}{l} [2;+\infty[\to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto 1/n^x \end{array} \right.$

Appliquons le théorème d'intégration terme à terme (cas positif) :

(H1) Soit $n \geq 2$, $f_n \in \mathcal{C}\Pi([2;+\infty[, \mathbb{R}_+)$

$x^2 f_n(x) = \frac{x^2}{e^{\ln(n)x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$, donc $f_n(x) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$x \mapsto \frac{1}{x^2}$ int en $+\infty$ et positive (Riemann)

Par théorème de comparaison, $f_n(x)$ est intégrable en $+\infty$

(H2) Soit $x \in [2;+\infty[$ fixé.

$\sum_{n \geq 2} f_n(x)$ cv d'après Riemann ~~+ théorème de compar~~

- $\sum_{n=2}^{+\infty} \underbrace{f_n(x)}_{\geq 0} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \zeta(x) - 1$

(H1') : Pour tout $n \geq 2$, f_n est continue sur $[2;+\infty[$

(H2') : Soit $(n, x) \in \mathbb{N}_{\geq 2} \times [2;+\infty[$.

$|f_n(x)| = \frac{1}{n^x} \leq \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\text{indép de } x}$, ainsi $\|f_n\|_{\infty,[2;+\infty[} \leq \frac{1}{n^2}$ atteint en $x = 2$

Donc, $\sum \|f_n\|_{\infty,[2;+\infty[}$ converge (par critère de Riemann)

Donc $\sum f_n$ CN

Donc $\sum f_n$ CUK

Ainsi, $\sum_{n=2}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[2;+\infty[$

Cela nous livre : $\int_2^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \int_2^{+\infty} f_n(x)dx$

~~Donc, $\int_2^{\infty} \zeta(x) - 1 dx =$~~

Soit $A \in \mathbb{R}_{\geq 2}$,

$$\int_2^A f_n(x)dx = \int_2^A e^{-\ln(n)x} dx = \left[-\frac{1}{\ln(n)} e^{-\ln(n)x} \right]_2^A$$

$$= \frac{1}{\ln(n)n^2} - \frac{1}{\ln(n)n^A} \xrightarrow[A \to +\infty]{} \frac{1}{n^2 \ln(n)}$$

$$\boxed{\text{Finalement, } \int_2^{+\infty} \zeta(x) - 1 \, dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln(n)}}$$

Exercice 38 (Cours)

Soit $f \left| \begin{array}{l} [1;+\infty[\times]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,t) \mapsto \sqrt{x+\cos(t)}\, e^{-t} \end{array} \right.$

(H1) $\forall x \in [1;+\infty[$, $f(x,\cdot)$ est cpm sur $\mathbb{R}_+$

(H2) $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $f(\cdot,t)$ est $\mathcal{C}^0$ sur $[1;+\infty[$

(H3) Soit $[\alpha;\beta] \subset [1;+\infty[$, $x \in [\alpha;\beta]$, $t \in \mathbb{R}_+^*$

$|\sqrt{x+\cos(t)}\, e^{-t}| \leq \sqrt{1+\beta}\, e^{-t} = \varphi_{\alpha,\beta}(t)$

$\varphi_{\alpha,\beta}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et intégrable car $-1<0$

Donc par théorème de $\mathcal{C}^0$ d'une intégrale à paramètre, il vient

$\forall x \in \mathbb{R}_{\geq 1}$, $f(x,\cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$

et $g \left| \begin{array}{l} [1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_0^{+\infty} \sqrt{x+\cos(t)}\, e^{-t}\, dt \end{array} \right.$ est $\mathcal{C}^0$ sur $[1;+\infty[$.

Exercice 25 (Cours)

(H1) On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \left| \begin{array}{l} [0;1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \sum_{n=0}^{n} (-t^a)^k \end{array}\right.$ qui sont $\mathcal{C}^0$ sur $[0;1[$

(H2) Soit $t \in [0;1[$

$\sum (-t^a)^n$ converge car série géométrique de raison $-1 < -t^a < 1$

$$f_n \xrightarrow{CS} f \left| \begin{array}{l} [0;1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{1+t^a} \end{array}\right. \quad \text{avec } f \ \mathcal{C}^0 \text{ sur } [0;1[$$

(H3) Soit $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0;1[$

$$|f_n(t)| = \left| \sum_{k=0}^{n} (-t^a)^k \right| \leq \left| \frac{1-(-t^a)^{n+1}}{1+t^a} \right| \leq 2 = \varphi(t)$$

φ est intégrable et $\mathcal{C}^0$ sur $[0;1[$.

Par théorème de convergence dominée,

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-t^a)^n \, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 t^{an} \, dt$$

$$\int_0^1 t^{an} \, dt = \left[\frac{t^{an+1}}{an+1} \right]_0^1 = \frac{1}{an+1}$$, d'où finalement

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{1+t^a} \, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{na+1}}$$

Exercice 21 (TD)

Q1) On pose $g \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \times]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ (x,t) \mapsto \dfrac{\text{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} \end{array} \right.$

- Soit $x \in \mathbb{R}^*$ fixé.

  - $g(x,.)$ est $\mathcal{C}$pm sur $]0;+\infty[$.
  - $|g(x,t)| \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2t^3} > 0$

Par Riemann et le thm d'$\int$ des relations de comparaison, $g(x,.)$ int en $+\infty$.

  - $|g(x,t)| \xrightarrow[t \to 0^+]{} |x|$, donc $|g(x,t)|$ est prol. par $\mathcal{C}^0$ en 0

- $g(0,.)$ est la fct° nulle, int sur $[0;+\infty[$

$\boxed{\mathcal{D}_g = \mathbb{R}}$

Q2) On veut appliquer le critère $\mathcal{C}^1$.

(H1) Soit $t \in]0;+\infty[$ fixé. $g(.,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$\forall x \in \mathbb{R}, \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \dfrac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$

(H2) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé, $g(x,.)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,.)$ sont cpm $]0;+\infty[$

(H3) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. $g(x,\cdot)$ int sur $]0;+\infty[$ (Voir Q1)

(H4) $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times]0;+\infty[$

$$\left| \frac{1}{1+t^2} \times \frac{1}{\underbrace{1+x^2t^2}_{>0}} \right| \leq \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$

φ est cpm sur $]0;+\infty[$ et int (Arctan$' = \varphi$ et Arctan a des limites finies en 0 et $+\infty$)

Le théorème livre f $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} \frac{1}{1+x^2t^2} dt$

~~Q3)~~ D'après le théorème de décomposition en éléments simples,
~~Soit $w \neq 1$~~ Soit $x \in]0;1[\cup]1;+\infty[$, $w \neq 1$
$\exists! (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tq

$$\frac{1}{(1+X^2)(1+wX^2)} = \frac{aX+b}{1+X^2} + \frac{cX+d}{1+wX^2}$$

$$= \frac{aX+b+waX^3+wbX^2+cX+d+cX^3+dX^2}{(1+X^2)(1+wX^2)}$$

Donc (S) : $\begin{cases} aw+c=0 \\ bw+d=0 \\ a+c=0 \\ b+d=1 \end{cases}$ ~~donc~~ $\cancel{\begin{cases} w(a-1)=0 \\ bw+d=0 \\ c=-a \\ b+d=1 \end{cases}}$

$a=c=0$ conviennent et ils sont uniques.

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ \cancel{c=0}\ \omega b+d-\omega b-\omega d=-\omega & L_2 \leftarrow L_2-\omega L_4 \\ c=0 \\ b+d=1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ d=-\dfrac{\omega}{1-\omega} \\ c=0 \\ b=1+\dfrac{\omega}{1-\omega} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{1/1-x^2}{1+t^2} + \frac{-x^2/1-x^2}{1+x^2t^2}$$

Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\int_0^A \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}\,dt = \frac{1}{1-x^2}\int_0^A \frac{1}{1+t^2}\,dt - \frac{x}{1-x^2}\int_0^A \frac{x}{1+x^2t^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{1-x^2}\operatorname{Arctan}(A) - \frac{x}{1-x^2}\operatorname{Arctan}(xA)$$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}\,dt = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}\,dt$

$$= \frac{\pi}{2(1-x^2)}\left[1-x\right] = \frac{\pi}{2(1-x^2)}$$

$\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[, f'(x) = \dfrac{\pi}{2(1+x)}$

. OK pour $x=0$

Comme f' et $x \mapsto \dfrac{\pi}{2(1+x)}$ sont $\mathcal{C}^0$ sur $[0;+\infty[$.

. OK pour $x=1$

Q3) TFA. $\forall x \geq 0, f(x) = \underbrace{f(0)}_{0} + \int_0^x \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+t} dt$

$= \frac{\pi}{2} \ln(1+x)$

Exercice 5 (Cours)

Q1) Soit $x \in \mathbb{R}_+$

$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x \in [0;n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$\forall n > x, f_n(x) = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Donc (f_n) converge simplement vers la fonction nulle

Q2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. f_n est cpm sur $[0;+\infty[$

$\forall x \geq n, f_n(x) = 0$, donc f_n est intégrable en $+\infty$.

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \int_0^n f_n(t)\,dt + \int_n^{+\infty} \underbrace{f_n(t)\,dt}_{=0}$$

$$= \int_0^n \frac{1}{n}\,dt = 1$$

(Q3) $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n = 1 \neq 0 = \int_0^{+\infty} \cancel{\lim\limits_{n\to+\infty} f_n}\ f$ avec f la fct° nulle.

<u>Exercice 2</u> (TD)

$$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2},\ f_n \left| \begin{array}{l} [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{x^n}{1+x^{2n}} \end{array} \right.$$

(H1) Pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, f_n cpm sur $[0;+\infty[$.

(H2) Soit $x \in [0;+\infty[$ fixé,
Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$$

1^er^ cas : $x < 1$, $\dfrac{x^n}{1+x^{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

2^ème^ cas : $x > 1$, $\dfrac{x^n}{1+x^{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

3^e^ cas : $x = 1$, $\dfrac{x^n}{1+x^{2n}} = \dfrac{1}{2}$

D'où $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{CS} f \left| \begin{array}{l} [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \neq 1 \\ \frac{1}{2} \text{ si } x = 1 \end{cases} \end{array} \right.$

(H3) Soit $(x,n) \in]0;+\infty[\times \mathbb{N}_{\geq 2}$.

$$|f_n(x)| = \left| \frac{x^n}{1+x^{2n}} \right| = \frac{|x^n|}{\underbrace{1+(x^2)^n}_{\geq 0}} \leq \frac{1}{x^2}$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x < 1 \\ \frac{1}{x^2} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$