TD – Intégrales à paramètre

1. Théorème de convergence dominée

Exercice de la banque CCINP n°25. —

1. *Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction* $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ *est intégrable sur* $[0,+\infty[$.
2. *Pour tout* $n \in \mathbf{N}$, *on pose* $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2+t^n e^{-t}}$. *Calculer* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice de la banque CCINP n°26. — *Pour tout entier* $n \geqslant 1$, *on pose* $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt$.

1. *Justifier que* I_n *est bien définie.*
2. (a) *Étudier la monotonie de la suite* $(I_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.
   (b) *Déterminer la limite de la suite* $(I_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.
3. *La série* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n I_n$ *est-elle convergente ?*

Exercice de la banque CCINP n°27. — *Pour tout* $n \in \mathbf{N}^*$, *on pose* $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$ *et* $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. *Étudier la convergence simple de la suite de fonctions* (f_n) *sur* $[0,1]$.
2. *Soit* $a \in]0,1[$. *La suite de fonctions* (f_n) *converge-t-elle uniformément sur* $[a,1]$ *?*
3. *La suite de fonctions* (f_n) *converge-t-elle uniformément sur* $[0,1]$ *?*
4. *Trouver la limite de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

Exercice 1 ★☆☆ — *Pour tout* $n \in \mathbf{N}$, *posons :*

$$f_n \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{x\,(1+x^2)} \end{array} \right.$$

1. *Démontrer que, pour tout* $n \in \mathbf{N}^*$, f_n *est intégrable sur* $]0,+\infty[$.
2. *Démontrer que la suite de terme général* $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ *converge vers une limite à préciser.*

`theoremeConvergenceDominee01`

Exercice 2 ★★☆ — *Étudier la limite éventuelle de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{2n}+1}\,\mathrm{d}x$ *lorsque* n *tend vers* $+\infty$.

`theoremeConvergenceDominee02`

Exercice 3 ★★☆ — *Vérifier que la suite de terme général* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(n\,t)}{n\,t+t^2}\,\mathrm{d}t$ *est bien définie, qu'elle converge et déterminer sa limite.*

`theoremeConvergenceDominee03`

Exercice 4 ★★☆ — *Soient a, b deux réels tels que $0 < a < 1 < b$. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbf{R})$ telle que $f(1) \neq 0$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons :*

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)}{1+x^n} \end{array} \right.$$

1. *Déterminer la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$.*
2. *Démontrer que $\displaystyle\int_a^b f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^1 f(x)\ \mathrm{d}x$.*
3. *Démontrer que $\displaystyle\int_a^1 x^{n-1} f_n(x)\ \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(2)}{n} f(1)$.*

`theoremeConvergenceDominee04`

Exercice 5 ★★☆ — *Soit $f\colon \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}_+$ une fonction continue intégrable sur $\mathbf{R}_+$. Déterminer la limite éventuelle de la suite de terme général $u_n := n \displaystyle\int_0^1 \frac{f(n\,t)}{1+t}\ \mathrm{d}t$.*

`theoremeConvergenceDominee05`

Exercice 6 ★★☆ — *Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, posons $U_n := \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^3)^n}\ \mathrm{d}x$ et $V_n := \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n}\ \mathrm{d}x$. Déterminer la nature des séries numériques $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} U_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} V_n$.*

`theoremeConvergenceDominee06`

Exercice 7 ★★★ — *Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons $a_n := \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\ \mathrm{d}x$.*

1. *Étudier la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$.*
2. *Déterminer un développement asymptotique de a_n, avec une précision de l'ordre de $\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.*

`theoremeConvergenceDominee07`

Exercice 8 ★★★ — *Soit $f\colon \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Supposons f et f' intégrables sur $[0,+\infty[$.*

1. *Soit $x > 0$. Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n(x) := \displaystyle\int_0^{+\infty} n\ \cos(t)\ \sin^n(t)\ f(x\,t)\ \mathrm{d}t$.*
2. *Préciser le mode de convergence de la suite de fonctions de terme général u_n sur $]0,+\infty[$.*

`theoremeConvergenceDominee08`

---

2. Intégration terme à terme

Exercice de la banque CCINP n°49. — *Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $M = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$. On pose :*

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \qquad \forall\, t \in [0,+\infty[\qquad f_n(t) = \frac{a_n t^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-t}$$

1. (a) *Justifier que la suite (a_n) est bornée.*
   (b) *Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.*

   On admettra, pour la suite de l'exercice, que la fonction $f\colon t \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.

2. (a) *Justifier que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction* $g_n \colon t \longmapsto t^n \, \mathrm{e}^{-t}$ *est intégrable sur* $[0, +\infty[$ *et calculer* $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$.
En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$.

   (b) *Prouver que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n\, t^n}{n!}\, \mathrm{e}^{-t} \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Exercice 9 ★☆☆ — *Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons :*

$$f_n \left| \begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^{2n+1}\,\ln(x)}{x^2-1} \end{array} \right.$$

1. *Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n est intégrable sur* $]0,1[$.
2. *Démontrer que la suite* $\displaystyle\left(J_n := \int_0^1 f_n(x)\ \mathrm{d}x \right)_{n\in\mathbf{N}}$ *est convergente et déterminer sa limite.*
3. *Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,* $\displaystyle J_n = \frac{1}{4} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$, *puis donner un équivalent de J_n lorsque n tend vers $+\infty$.*

`integrationTermeTerme01`

Exercice 10 ★☆☆ — *Démontrer que* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln^2(x)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

`integrationTermeTerme02`

Exercice 11 ★☆☆ — *Démontrer que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\mathrm{e}^x - 1}\ \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

`integrationTermeTerme03`

Exercice 12 ★★☆ — *Démontrer que* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)\ \ln(1-t)}{t}\ \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

`integrationTermeTerme04`

Exercice 13 ★☆☆ — *Démontrer que* $\displaystyle\int_0^1 \arctan(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\,(2n+2)}$.

`integrationTermeTerme05`

Exercice 14 ★★☆ — *Démontrer que* $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\ \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$.

`integrationTermeTerme06`

Exercice 15 ★★★ — *Posons :*

$$f \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\, \mathrm{e}^{-\sqrt{n}\,x} \end{array} \right.$$

Démontrer que f est bien définie, continue et intégrable sur $]0,+\infty[$, *puis démontrer que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

`integrationTermeTerme07`

---

3. Fonctions définies par une intégrales

Exercice de la banque CCINP n°29. — *On pose :*

$$\forall\, x \in]0,+\infty[\qquad \forall\, t \in]0,+\infty[\qquad f(x,t) = e^{-t}\, t^{x-1}$$

1. *Démontrer que, pour tout* $x \in]0,+\infty[$*, la fonction* $t \longmapsto f(x,t)$ *est intégrable sur* $]0,+\infty[$*. On pose alors :*

$$\forall\, x \in]0,+\infty[\qquad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$$

2. *Pour tout* $x \in]0,+\infty[$*, exprimer* $\Gamma(x+1)$ *en fonction de* $\Gamma(x)$*.*
3. *Démontrer que* Γ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $]0,+\infty[$ *et exprimer* $\Gamma'(x)$ *sous forme d'intégrale.*

Exercice de la banque CCINP n°30. —

1. *Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.*
2. *Démontrer que la fonction* $f\colon x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(x\,t)\, dt$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbf{R}$*.*
3. (a) *Trouver une équation différentielle linéaire* (E) *d'ordre* 1 *dont* f *est solution.*
   (b) *Résoudre* (E) *.*

Exercice de la banque CCINP n°50. — *On considère la fonction* $F\colon x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2\,t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$*.*

1. *Prouver que* F *est définie et continue sur* $]0,+\infty[$*.*
2. *Prouver que* $x \longmapsto x\,F(x)$ *admet une limite en* $+\infty$ *et déterminer la valeur de cette limite.*
3. *Déterminer un équivalent, au voisinage de* $+\infty$*, de* $F(x)$*.*

Exercice 16 ★☆☆ — *Posons*

$$f \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x\cos(\theta))\ \mathrm{d}\,\theta \end{array}\right.$$

1. *Démontrer que* f *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbf{R}$*.*
2. *Pour tout* $x \in \mathbf{R}$*, calculer* $x\,f''(x) + f'(x) + x\,f(x)$*.*

`fonctionDefinieParIntegrale01`

Exercice 17 ★☆☆ — *Posons :*

$$f \left|\begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{1} \frac{t-1}{\ln(t)}\, t^x\ \mathrm{d}t \end{array}\right.$$

1. *Démontrer que* f *est bien définie et de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $]-1,+\infty[$ *et calculer* f'*.*
2. *En déduire une expression de* $f(x)$*.*

`fonctionDefinieParIntegrale03`

Exercice 18 ★☆☆ — *Soit* $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$ *une fonction bornée. Posons :*

$$g \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\, f(x-t)\ \mathrm{d}t \end{array}\right.$$

1. *Démontrer que* f *est définie et de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $\mathbf{R}$*.*
2. *Exprimer* g'' *en fonction de* g *et de* f*.*

`fonctionDefinieParIntegrale04`

Exercice 19 ★☆☆ — *Notons f la fonction définie par :*

$$f \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{e}^{-x\,t}\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

1. *Démontrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_{>0}$ et expliciter f'.*
2. *En déduire une expression simple de f.*

`transformeeLaplaceSinusCardinal`

Exercice 20 ★☆☆ — *Soit la fonction :*

$$f \colon x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x\,t)}{t\,(1+t^2)}\ \mathrm{d}t$$

1. *Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.*
2. *Étudier la dérivabilité de f et déterminer une expression de f'.*
3. *Déterminer une expression simple de f.*

`fonctionDefinieParIntegrale05`

Exercice 21 ★☆☆ — *Posons :*

$$f \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t\,x}}{1+t^2}\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

1. *Démontrer que f est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^*$.*
2. *Vérifier que f est solution sur $\mathbf{R}_+^*$ de l'équation différentielle $y'' + y = \dfrac{1}{x}$.*

`fonctionDefinieParIntegrale06`

Exercice 22 ★☆☆ — *On pose, pour $a > 0$, pour tout $x \in \mathbf{R}$:*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\,x}\, e^{-a\,t^2}\ \mathrm{d}t$$

1. *Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et vérifie, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $F'(x) = -\dfrac{x}{2\,a}\,F(x)$.*
2. *En déduire que, pour tout x réel, $F(x) = F(0)\,\exp\left(-\dfrac{x^2}{4\,a}\right)$, puis que $F(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\,\exp\left(-\dfrac{x^2}{4\,a}\right)$.*

`transformeeFourierGaussienne`

Exercice 23 ★★☆ — *Soient deux réels $a > 0$ et $b > 0$. On définit, pour $x \in \mathbf{R}$:*

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\, \cos(x\,t)\ \mathrm{d}t$$

1. *Justifier, pour tout $x \in \mathbf{R}$, l'existence de $F(x)$.*
2. *Prouver que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et calculer $F'(x)$, pour tout $x \in \mathbf{R}$.*
3. *En déduire qu'il existe une constante $C \in \mathbf{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{b^2+x^2}{a^2+x^2}\right) + C$.*
4. *Justifier que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $F(x) = -\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \psi'(t)\,\sin(x\,t)\ \mathrm{d}t$ où la fonction ψ est définie par*

$$\psi \colon t \longmapsto \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$$

5. *En déduire la valeur de C.*

`fonctionDefinieParIntegrale07`

Exercice 24 ★★☆ — *Posons :*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^x}\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

1. *Démontrer que f est bien définie et que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) + f(-x) = 1$.*
2. *Calculer $f(k)$ pour $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.*
3. *Étudier les limites éventuelles de f en $-\infty$ et en $+\infty$.*
4. *Déterminer un équivalent de $f(x) - 1$ quand x tend vers $+\infty$.*
5. *Étudier la convexité de la fonction f.*

`fonctionDefinieParIntegrale08`

Exercice 25 ★★☆ — *Posons :*

$$f : x \longmapsto \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^x\ \mathrm{d}t$$

1. *Démontrer que f est définie et continue sur $]-1, +\infty[$.*
2. *Calculer $f(1)$.*
3. *Démontrer que, pour tout $x > -1$, $f(x+2)\, f(x+2) = (x+1)\, f(x)$.*
4. *En déduire un équivalent de $f(x)$ en -1^+.*
5. *Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, +\infty[$.*
6. *Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\ \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(2\,t)}{2}\right)\ \mathrm{d}t$.*
7. *En déduire $f'(0)$.*

`fonctionWallis`

Exercice 26 ★★☆ — *Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme non constant. On souhaite démontrer que P admet au-moins une racine (théorème de d'Alembert-Gauß). Raisonnons par l'absurde et supposons que P ne possède aucune racine complexe.*

1. *Démontrer que la fonction I définie par :*

$$I \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ r & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{P\left(r\, \mathrm{e}^{i\theta}\right)}\ \mathrm{d}\,\theta \end{array} \right.$$

   est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$.
2. *Démontrer que I est constante.*
3. *Étudier la limite éventuelle de I en $+\infty$. Conclure.*

`theoremeDAlembertGaussIntegralesParametre`

Exercice 27 ★★★ — *Soient deux réels $a > 1$ et $b > 1$. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln\left(\frac{b - \cos(x)}{a - \cos(x)}\right)\ \mathrm{d}x$.*

`integralesParametreOralX`
