TD – Fonctions vectorielles

Exercice de la banque CCINP n°3. —

1. *On pose*
$$g\colon x \longmapsto \mathrm{e}^{2x} \quad \text{et} \quad h\colon x \longmapsto \frac{1}{1+x}$$
Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.
2. *On pose*
$$f\colon x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$$
En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.
3. *Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.*

Exercice de la banque CCINP n°74 (tronqué). —

1. *On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres de A puis une base de vecteurs propres associés.*
2. *On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$, x, y, z désignant trois fonctions de la variable t, dérivables sur $\mathbb{R}$. En utilisant la question 1. et en le justifiant, résoudre ce système.*

Exercice de la banque CCINP n°75. — *On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.*

1. *Démontrer que A n'est pas diagonalisable.*
2. *On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A. Trouver une base (v_1, v_2) de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$. On donnera explicitement les valeurs de a, b et c.*
3. *En déduire la résolution du système différentiel $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.*

Exercice 1 ★☆☆ — *Soient $n \in \mathbf{N}$ et*
$$\mathbf{O}_{2n+1}(\mathbf{R}) := \left\{ A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbf{R}) \ : \ A^\top A = I_{2n+1} \right\}$$
On considère une application $M\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbf{R})$ dérivable sur $\mathbf{R}$ vérifiant
$$\forall\, t \in \mathbf{R} \quad M(t) \in \mathbf{O}_{2n+1}(\mathbf{R})$$
Démontrer que, pour tout $t \in \mathbf{R}$, la matrice $M'(t)$ n'est pas inversible.

`cheminDerivableDansGroupeOrthogonalFormatImpair` [indication(s)]

Exercice 2 ★☆☆ — *Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, $(E, \langle \cdot\, , \, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $f\colon I \longrightarrow E$ une application dérivable, qui ne s'annule pas sur I. Démontrer que l'application*
$$g \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & ||\, f(t)\, || \end{array} \right.$$
est dérivable sur I, puis exprimer, pour tout $t \in I$, $g'(t)$ en fonction de $f(t)$ et de $f'(t)$.

`derivabiliteDeriveeNormeFonctionDerivableSansAnnulation` [indication(s)]

Exercice 3 ★☆☆ — *Pour tout* $(n,x) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{R}$, *on pose*

$$D_n(x) := \det \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x^2/2! & x & 1 & \ddots & \vdots \\ x^3/3! & x^2/2! & x & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ x^n/n! & \dots & \dots & x^2/2! & x \end{pmatrix} \qquad [\textit{déterminant d'une matrice de } \mathcal{M}_n(\mathbf{R})]$$

Calculer $D_n(x)$, *pour* $(n,x) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{R}$.

`calculDeterminantAvecDerivation` [indication(s)]

Exercice 4 ★☆☆ — *Soient* E *un* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel normé de dimension finie,* F *un sous-espace vectoriel de* E, a, b *des réels tels que* $a < b$ *et* $f\colon [a,b] \longrightarrow E$ *une fonction continue par morceaux. Démontrer que*

$$(\forall\, t \in [a,b] \quad f(t) \in F\,) \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \in F$$

`integraleFonctionValeursSousEspaceVectoriel` [indication(s)]

Exercice 5 ★☆☆ — *Soient* a, b *des réels tels que* $a < b$, $(E, ||\cdot||)$ *un* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel normé de dimension finie et* $f \in \mathcal{C}^1([a,b], E)$ *telle que* $f(a) = 0_E$. *Démontrer que*

$$\left|\left| \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \right|\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} \sup_{x \in [a,b]} ||\, f'(x)\, ||$$

`majorationNormeIntegraleFonctionC1AnnulationBorneInferieure` [indication(s)]

Exercice 6 ★★☆ — *Soient* E *un* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel de dimension finie et* $f\colon [0,1] \longrightarrow E$ *une fonction nulle en 0 et dérivable en* 0 *à droite. Démontrer que*

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{2}\, f_d'(0)$$

`sommeConvergeantNombreDeriveeDroite0` [indication(s)]

Exercice 7 ★★☆ — *Soient* E *un* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme* $||\cdot||$ *et* $f\colon [0,1] \longrightarrow E$ *une application de classe* $\mathcal{C}^2$ *telle*

$$f(0) = f'(0) = f'(1) = 0_E \qquad \textit{et} \qquad ||\, f(1)\, || = 1$$

Démontrer que

$$\sup_{t \in [0,1]} ||\, f''(t)\, || \geqslant 4.$$

`minorationNormeInfinieDeriveeSecondeContraintesExtremites` [indication(s)]

Exercice 8 ★★★ — *Soient* E *un* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel de dimension finie et* $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow E$ *une fonction dérivable en* 0 *telle que*

$$\forall\, x \in \mathbf{R} \quad f(2x) = 2\, f(x)$$

Démontrer que f *est linéaire.*

`fonctionDerivableZeroDeuxHomogene` [indication(s)]

Exercice 9 ★★★ — *Étudier la limite éventuelle de*

$$u_n := \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \qquad \text{et} \qquad v_n := \sum_{k=1}^{n} \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{k+n}}\right)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

`sommeSinusInegaliteTaylorLagrangeSommesRiemann` [indication(s)]

Exercice 10 ★★★ — *Soient a, b des réels tels que $a < b$, $(E, \langle \cdot\ ,\ \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{C}^0([a,b], E)$ une application non identiquement nulle. On suppose que*

$$\left|\left| \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \right|\right| = \int_a^b ||\, f(t)\, ||\ \mathrm{d}t$$

et on note u le vecteur normalisé de $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$. Comme $E = \mathrm{Vect}\,(u) \oplus \mathrm{Vect}\,(u)^{\perp}$

$$\forall\, t \in [a,b] \quad \exists\,!(\alpha(t), v(t)) \in \mathbf{R} \times \mathrm{Vect}\,(u)^{\perp} \quad f(t) = \alpha(t) \cdot u + v(t)$$

1. *Démontrer que les applications α et v sont continues sur $[a,b]$.*
2. *Démontrer que le vecteur $\displaystyle\int_a^b v(t)\ \mathrm{d}t$ est orthogonal à u.*
3. *Démontrer que $\displaystyle\int_a^b \alpha(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b ||\, f(t)\, ||\ \mathrm{d}t$.*
4. *Démontrer que, pour tout $t \in [a,b]$, $\alpha(t) \leqslant ||\, f(t)\, ||$.*
5. *En déduire que, pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) = ||\, f(t)\, || \cdot u$.*

`normeIntegraleEgaleIntegraleNorme` [indication(s)]

---

cheminDerivableDansGroupeOrthogonalFormatImpair [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 1

(a) Démontrer que la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbf{R}) \\ t & \longmapsto & M(t)^\top M(t) \end{array} \right.$$

est dérivable.

(b) Dériver la fonction f pour en déduire que

$$\forall\, t \in \mathbf{R} \quad M'(t)^\top M(t) = -M(t)^\top M'(t)$$

puis

$$\forall\, t \in \mathbf{R} \quad \det\left(M'(t)\right) = -\det\left(M'(t)\right)$$

derivabiliteDeriveeNormeFonctionDerivableSansAnnulation [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 2

- Justifier que la fonction
$$h \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \langle\, f(t)\,,\, f(t)\,\rangle \end{array} \right.$$
est dérivable sur I, puis calculer, pour tout $t \in I$, $h'(t)$ en fonction de $f(t)$ et de $f'(t)$.
- Comme
  — la fonction h est dérivable sur I et prend ses valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$ (à justifier) ;
  — la fonction $\sqrt{\cdot}$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$

  la fonction $g = \sqrt{\cdot} \circ h$ est dérivable sur I et on dispose d'une formule pour la composée de deux fonctions dérivables de la variable réelle.

calculDeterminantAvecDerivation [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 3

(a) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, justifier que la fonction

$$D_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \det \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x^2/2! & x & 1 & \ddots & \vdots \\ x^3/3! & x^2/2! & x & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ x^n/n! & \dots & \dots & x^2/2! & x \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

est dérivable sur $\mathbf{R}$.

(b) Démontrer que

$$\forall\, (n,x) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{R} \quad D'_{n+1}(x) = D_n(x) \quad \text{et} \quad D_{n+1}(0) = 0$$

integraleFonctionValeursSousEspaceVectoriel [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 4

(a) Justifier que

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^* \quad S_n^g(f) := \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) \in F$$

(b) Quelle propriété topologique remarquable possède un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé ?

majorationNormeIntegraleFonctionC1AnnulationBorneInferieure [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 5

(a) Justifier que le nombre réel

$$|| f' ||_{\infty,[a,b]} := \sup_{x\in[a,b]} || f'(x) ||$$

est bien défini.

(b) Justifier que la fonction

$$F \left| \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est de classe $\mathcal{C}^2$. On peut alors lui appliquer une des inégalités de Taylor-Lagrange pour majorer $|| F(b) - F(a) ||$.

sommeConvergeantNombreDeriveeDroite0 [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 6

(a) Construire une fonction $\varepsilon \in \mathbf{R}^{[0,1]}$ telle que

- $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$
- pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = f'_d(0)\, x + x\, \varepsilon(x)$

(b) Démontrer que

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^* \quad \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{1}{2}\, f'_d(0) = \frac{1}{2\,n}\, f'_d(0) + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k\, \varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

(c) Fixer $\eta > 0$ et justifier, avec soin, que

$$\exists\, N_1 \in \mathbf{N}^* \quad \forall\, n \geqslant N_1 \quad \forall\, k \in [\![1, n]\!] \quad \left|\varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right)\right| \leqslant \eta$$

puis que

$$\exists\, N_2 \in \mathbf{N}^* \quad \forall\, n \geqslant N_2 \quad \left|\frac{1}{2\,n}\, f'_d(0)\right| \leqslant \eta$$

(d) En déduire que

$$\exists\, N \in \mathbf{N}^* \quad \forall\, n \geqslant N \quad \left|\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{1}{2}\, f'_d(0)\right| \leqslant 3\,\eta$$

minorationNormeInfinieDeriveeSecondeContraintesExtremites [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 7

(a) Justifier que $\sup_{x\in[0,1]} ||\, f''(x)\, ||$ est bien défini.

(b) En appliquant deux fois la formule de Taylor avec reste sous forme intégrale, démontrer que

$$f(1) = \int_0^1 (1-t)\cdot f''(t)\ \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad 0 = f(1) + \int_1^0 (-t)\cdot f''(t)\ \mathrm{d}t$$

(c) Déduire de (b) que

$$2\, ||\, f(1)\, || \leqslant \left(\int_0^1 |1-2\,t|\ \mathrm{d}t\right) \sup_{t\in[0,1]} ||\, f''(t)\, ||$$

fonctionDerivableZeroDeuxHomogene [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 8

(a) Démontrer que

$$\forall\, x \in \mathbf{R} \quad \forall\, n \in \mathbf{N} \quad f\,(2^n\,x) = 2^n\,f(x)$$

puis

$$\forall\, x \in \mathbf{R} \quad \forall\, n \in \mathbf{N} \quad f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n}\,f(x)$$

(b) En déduire que $f(0) = 0$.

(c) Fixer un réel $x \neq 0$. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \quad u_n = \frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}$$

est constante et qu'elle converge vers $f'(0)$.

sommeSinusInegaliteTaylorLagrangeSommesRiemann [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 9

1. Étude du comportement asymptotique de la suite de terme général u_n.
   (a) Justifier que
   $$\forall x \in \mathbf{R}_+ \quad |\sin(x) - x| \leqslant \frac{x^3}{6}$$
   (b) En déduire que
   $$u_n - \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \frac{k}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) - \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \frac{k}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
   (c) Justifier alors que
   $$\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \frac{k}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 x \sin(x) \, \mathrm{d}x$$
   puis calculer l'intégrale.
2. Étude du comportement asymptotique de la suite de terme général v_n.
   (a) Déduire de l'inégalité 1.(a) que
   $$\forall x \in \mathbf{R}_+ \quad \left|\sin^2(x) - x^2\right| \leqslant \frac{x^4}{3}$$
   (b) En déduire que
   $$v_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} = \sum_{k=1}^{n} \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{k+n}}\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
   (c) Justifier alors que
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(2)$$

`normeIntegraleEgaleIntegraleNorme` [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 10

1. Introduire
   - p la projection orthogonale de E sur $\mathrm{Vect}\,(u)$;
   - $q = p - \mathrm{id}_E$ la projection orthogonale de E sur $\mathrm{Vect}\,(u)^{\perp}$;
   - l'isomorphisme
   $$i \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathrm{Vect}\,(u) \\ \lambda & \longmapsto & \lambda \cdot u \end{array} \right.$$

   justifier la continuité des applications p, q, i^{-1}, puis exprimer les fonctions α, v à l'aide des applications f, p, q, i^{-1}.
2. Justifier que
   $$\forall\, n \in \mathbf{N}^* \quad \left\langle \frac{(b-a)}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} v\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \,,\, u \right\rangle = 0$$
   puis que l'application
   $$\langle \,\cdot\, , u \,\rangle \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \langle\, x \,,\, u \,\rangle \end{array} \right.$$
   est continue.
3. Observer que
   $$\underbrace{\left|\left| \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \right|\right| \cdot u}_{\in \mathrm{Vect}(u)} = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \underbrace{\left(\int_a^b \alpha(t)\ \mathrm{d}t \right) \cdot u}_{\in \mathrm{Vect}(u)} + \underbrace{\int_a^b v(t)\ \mathrm{d}t}_{\in \mathrm{Vect}(u)^{\perp}}$$
4. Appliquer le théorème de Pythagore, en remarquant que $||\, u \,|| = 1$.
5. (a) D'après Q3 et Q4
   $$\int_a^b \underbrace{||\, f(t) \,|| - \alpha(t)}_{\geqslant 0}\ \mathrm{d}t = 0$$
   (b) En déduire
   $$\forall\, t \in [a,b] \quad \alpha(t) = ||\, f(t) \,||$$
   (c) D'après le théorème de Pythagore
   $$\forall\, t \in [a,b] \quad ||\, f(t) \,||^2 = \alpha(t)^2 + ||\, v(t) \,||^2$$
   (d) Déduire de (b) et (c) le résultat demandé.