TD – Espaces vectoriels normés 3

Notation. — La lettre $\mathbf{K}$ désigne le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Exercice 1 ★☆☆ — *Notons $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$. Pour tout $f \in E$, notons $N_\infty(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \int_0^1 |f(x)|\, \mathrm{d}x$.*

1. *Démontrer succintement que N_∞ et N_1 sont des normes sur E.*
2. *Démontrer qu'il existe un réel $k > 0$ tel, que pour tout $f \in E$, $N_1(f) \leqslant k\, N_\infty(f)$.*
3. *Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.*
4. *Démontrer que les normes N_∞ et N_1 ne sont pas équivalentes.*

`comparaisonNormesEspaceFonctions` [indication(s)]

Exercice 2 ★☆☆ — *Munissons $E = \mathbf{R}[X]$ des normes $||\cdot||_\infty$ et $||\cdot||'_\infty$ définies, pour tout polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ par*

$$||\,P\,||_\infty = \max_{k\in\mathbf{N}} |\,[P]_k\,| \qquad \textit{et} \qquad ||\,P\,||'_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$$

1. *Démontrer que $||\cdot||_\infty$ et $||\cdot||'_\infty$ sont des normes.*
2. *Sont-elles équivalentes ?*
3. *Soit $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que les normes induites sur $\mathbf{R}_n[X]$ par $||\cdot||_\infty$ et $||\cdot||'_\infty$ sont équivalentes.*

`comparaisonNormesEspacePolynomes1` [indication(s)]

Exercice 3 ★☆☆ — *Munissons $E = \mathbf{R}[X]$ des normes $||\cdot||'_\infty$ et $||\cdot||'_1$ définies, pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, par*

$$||\,P\,||'_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)| \qquad \textit{et} \qquad ||\,P\,||'_1 = \int_0^1 |P(x)|\, \mathrm{d}x$$

1. *Vérifier que $||\cdot||'_1$ est bien une norme sur $\mathbf{R}[X]$.*
2. *Les normes $||\cdot||'_\infty$ et $||\cdot||'_1$ sont-elles équivalentes ?*
3. *Soit $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que les normes induites sur $\mathbf{R}_n[X]$ par $||\cdot||'_\infty$ et $||\cdot||'_1$ sont équivalentes.*

`comparaisonNormesEspacePolynomes2` [indication(s)]

Exercice 4 ★☆☆ — *Munissons l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$ de la norme $||\cdot||_\infty$. Notons φ la forme linéaire sur E définie par*

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ f & \longmapsto & \varphi(f) = f(1) - f(0) \end{array} \right.$$

1. *Démontrer que φ est continue, puis calculer la norme subordonnée $|||\,\varphi\,|||$.*
2. *L'application φ est-elle continue, si l'on remplace $||\cdot||_\infty$ par $||\cdot||_1$?*

`normeSubordonneeEvaluationFonction`

Exercice 5 ★★☆ — *Munissons $E = \mathbf{R}[X]$ des normes $||\cdot||_\infty$ et $||\cdot||'_\infty$ définies pour tout polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ par*

$$||\,P\,||_\infty = \max_{k\in[\![0,n]\!]} |\,[P]_k\,| \qquad \textit{et} \qquad ||\,P\,||'_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$$

Notons $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de polynômes de terme général $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$.

1. *Démontrer que $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée pour les normes $||\cdot||_\infty$ et $||\cdot||'_\infty$.*
2. *Démontrer que $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est divergente pour la norme $||\cdot||_\infty$.*
3. *Munissons $\mathcal{C}([0,1], \mathbf{R})$ de la norme $||\cdot||'_\infty$ définie par, pour tout $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbf{R})$*

   $$||\,f\,||'_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

   Démontrer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$, vue comme suite d'éléments de $\mathcal{C}([0,1], \mathbf{R})$, converge. Déterminer sa limite.

4. *La suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge-t-elle dans $\big(\mathbf{R}[X], ||\cdot||'_\infty\big)$?*

`convergenceSommesPartiellesSerieExponentielle`

Exercice 6 ★★☆ — *Munissons l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbf{R})$ de la norme $||\cdot||_\infty$ et l'espace vectoriel $F = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbf{R})$ de la norme $||\cdot||'_\infty$ définie par*

$$\forall f \in F, \quad ||\,f\,||'_\infty = ||\,f\,||_\infty + ||\,f'\,||_\infty$$

1. *Vérifier que $||\cdot||'_\infty$ est une norme sur F.*
2. *Démontrer que l'application linéaire φ définie par*

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ f & \longmapsto & \varphi(f) \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right. \end{array} \right.$$

est continue, puis calculer la norme subordonnée $|||\,\varphi\,|||$.

`normeSubordonneePrimitiveNulleEnZero`

Exercice 7 ★★☆ — *On note ℓ^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres complexes telles que la série $\sum |x_n|^2$ converge.*

1. *Soient $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^2$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^2$. Démontrer que la série $\sum \overline{x_n}\, y_n$ converge.*
2. *Démontrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites complexes $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$.*
3. *Pour toutes suites $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^2$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^2$, on pose*

$$\langle\, x\,,\, y\,\rangle := \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{x_n}\, y_n \qquad \text{et} \qquad ||\,x\,||_2 := \sqrt{\langle\, x\,,\, x\,\rangle}$$

Démontrer que $||\cdot||_2$ est une norme sur ℓ^2.

4. *Fixons un entier $n_0 \in \mathbf{N}$. Démontrer que l'application*

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \big(\ell^2, ||\cdot||_2\big) & \longrightarrow & (\mathbf{C}, |\cdot|) \\ (x_n)_{n\in\mathbf{N}} & \longmapsto & x_{n_0} \end{array} \right.$$

est une application linéaire continue, puis calculer la norme subordonnée $|||\,\varphi\,|||$.

`normeSubordonneeProduitScalaireHermitienEspaceSuites` [indication(s)]

Exercice 8 ★★☆ — *Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé. Notons $|||\cdot|||$ la norme subordonnée sur $\mathcal{L}_c(E)$. Soient $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}_c(E)$ convergeant vers un endomorphisme continu u de E et $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E convergeant vers un vecteur $x \in E$. Démontrer que $u_k(x_k) \xrightarrow[k\longrightarrow+\infty]{} u(x)$.*

`doubleLimiteEvaluationEndomorphismeContinu` [indication(s)]

Exercice 9 ★★☆ — *Notons ℓ^∞ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des suites réelles bornées. Nous le munissons de la norme $||\cdot||_\infty$. Démontrer que l'application*

$$\Delta \left| \begin{array}{ccc} \ell^\infty & \longrightarrow & \ell^\infty \\ (u_n)_{n\in\mathbf{N}} & \longmapsto & (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbf{N}} \end{array} \right.$$

est un endomorphisme continu, puis calculer sa norme subordonnée $|||\,\Delta\,|||$.

`normeSubordonneeDerivationDiscreteEspaceSuites` [indication(s)]

Exercice 10 ★★☆ — *Démontrer que l'application*

$$\Delta \left| \begin{array}{ccc} \big(\mathcal{C}^1([0,1],\mathbf{R}), ||\cdot||_\infty\big) & \longrightarrow & \big(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbf{R}), ||\cdot||_\infty\big) \\ f & \longmapsto & f' \end{array} \right.$$

est discontinue.

`derivationEspaceFonctionsNormeInfinieDiscontinue` [indication(s)]

Exercice 11 ★★☆ — *Soient $(E, ||\cdot||_E)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé tel que $E \neq \{0_E\}$, $(F, ||\cdot||_F)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé, $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$.*

1. *Démontrer que*

$$\underbrace{\sup_{x \in \overline{B(0_E,1)}} ||\, u(x)\,||_F}_{=:|||\,u\,|||} = \sup_{x \in B(0_E,1)} ||\, u(x)\,||_F = \sup_{x \in S(0_E,1)} ||\, u(x)\,||_F$$

2. *On suppose que E est de dimension finie. Démontrer que*

$$\exists\, x_0 \in S(0_E,1) \quad ||\, u(x_0)\,||_F = |||\,u\,||| \qquad \text{[\textit{la norme d'opérateur est atteinte sur la sphère unité}]}$$

3. *Dans cette question $(E, ||\cdot||_E) = (F, ||\cdot||_F) = \left(\mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R}), ||\cdot||_1\right)$ et u est l'endomorphisme de E défini par*

$$u \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & u(f) \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right. \end{array} \right.$$

   (a) *Démontrer que u est continue.*

   (b) *Calculer la norme subordonnée $|||\,u\,|||$.*

   (c) *Démontrer que*

$$\forall\, f \in \overline{B(0_E,1)} \quad ||\, u(f)\,||_1 \neq |||\,u\,||| \qquad \text{[\textit{la norme d'opérateur n'est pas atteinte sur la boule unité fermée}]}$$

`proprietesAdditionnellesNormeSubordonnee` [indication(s)] comparaisonNormesEspaceFonctions [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 1

1.
2. Pour tout $x \in [0,1]$, $|f(x)| \leqslant N_\infty(f)$.
3. D'après la question 2, l'application

$$\mathrm{id}_{N_\infty}^{N_1} \left| \begin{array}{ccc} (E, N_\infty) & \longrightarrow & (E, N_1) \\ f & \longmapsto & f \end{array} \right.$$

   est continue.
4. D'après la question 2, les normes N_∞ et N_1 sont équivalentes si et seulement si

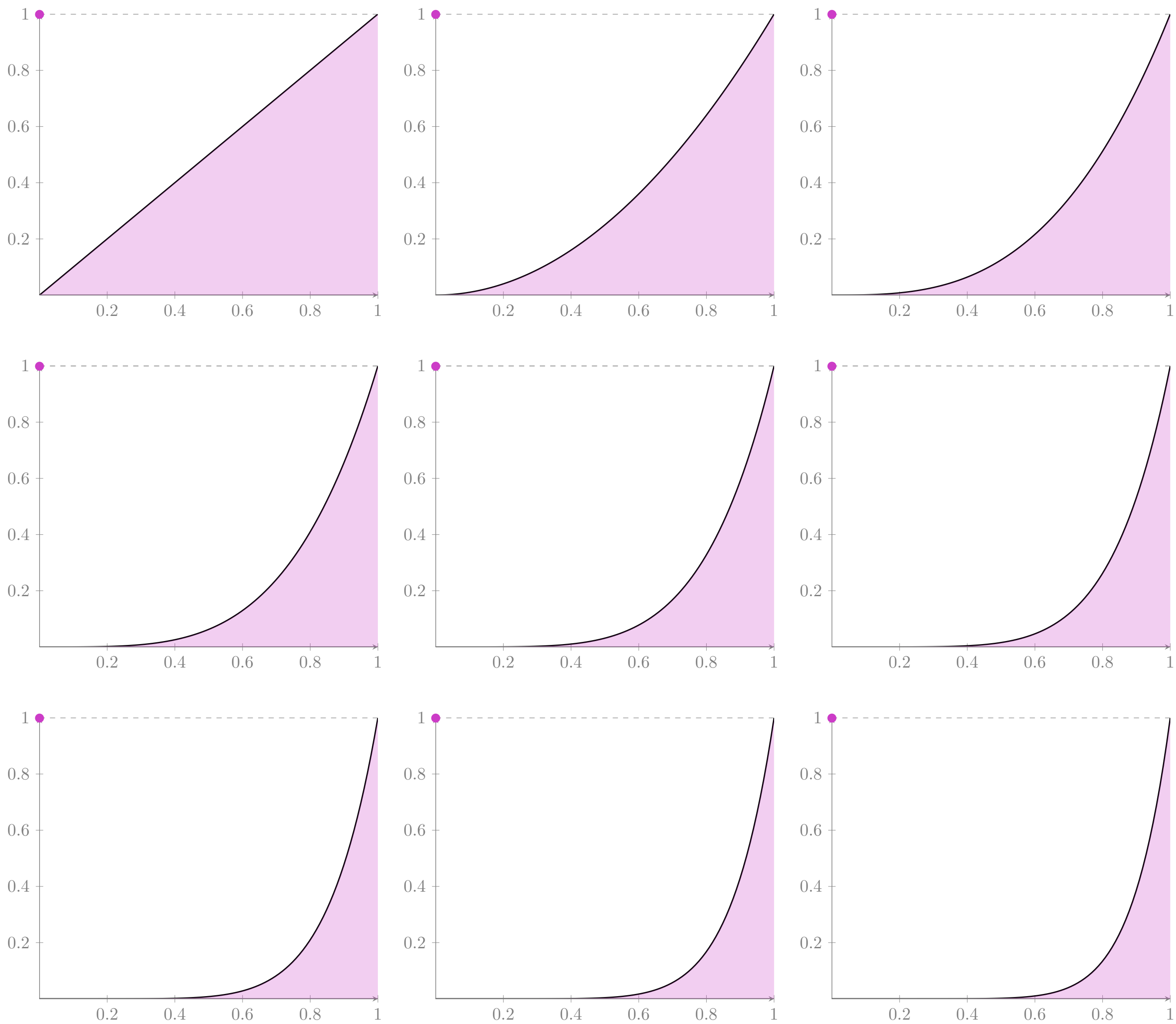
$$\exists\, \alpha > 0 \quad \forall\, f \in E \quad N_\infty(f) \leqslant \alpha\, N_1(f)$$

   donc si et seulement si

$$\forall\, (f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}} \quad f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{N_1} 0_E \implies f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{N_\infty} 0_E$$

   Pour établir que les normes N_∞ et N_1 ne sont pas équivalentes, il suffit donc de construire une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ telle que

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{N_1} 0_E \quad \text{et} \quad f_n \not\xrightarrow[n\to+\infty]{N_\infty} 0_E$$



comparaisonNormesEspacePolynomes1 [énoncé]

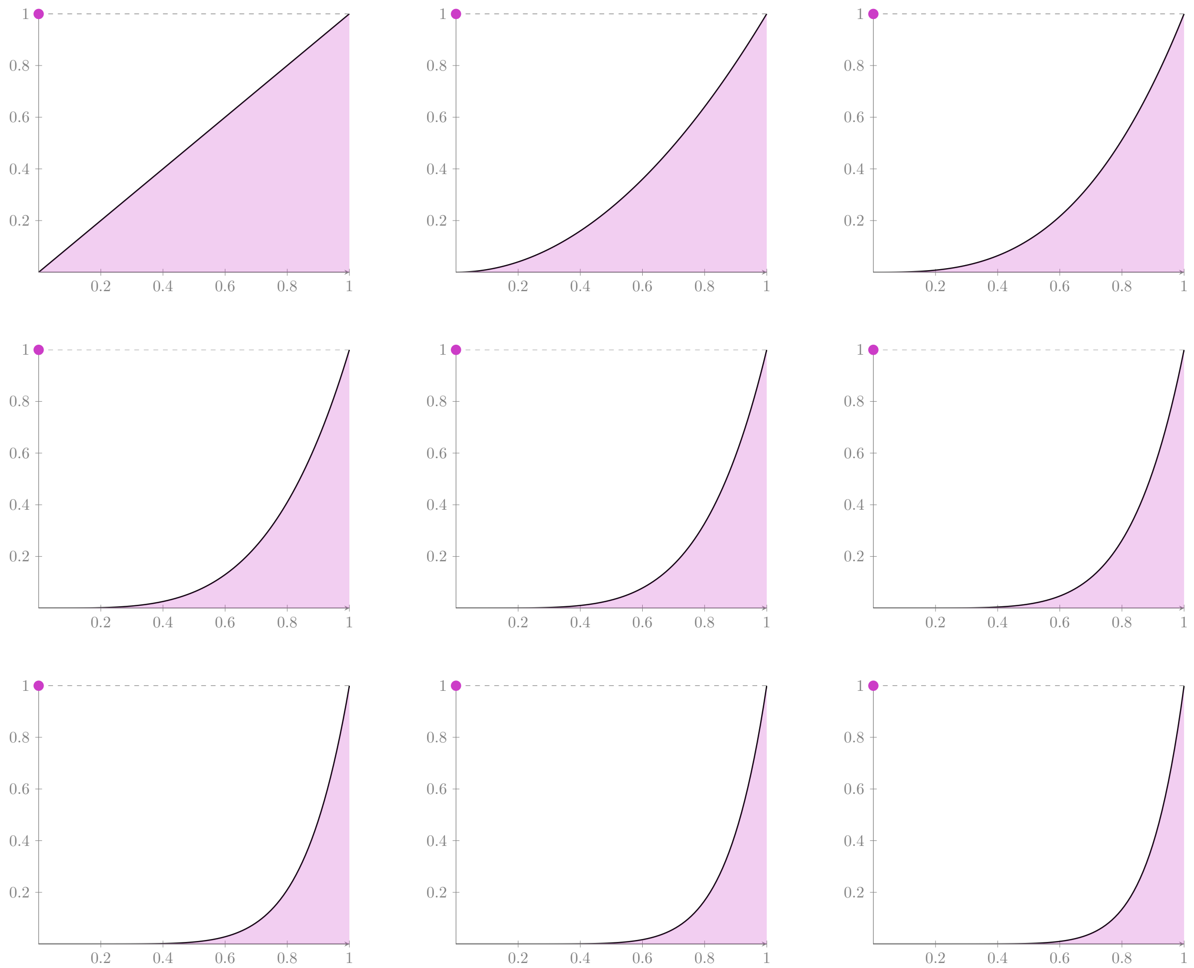
Indication(s) pour l'exercice 2

1. Un polynôme de $\mathbf{R}[X]$ possédant une infinité de racines est nécessairement le polynôme nul, i.e. que tous ses coefficients sont nuls.
2.
   - Si $||\cdot||_\infty$ domine $||\cdot||'_\infty$ alors
   $$\exists\, \alpha > 0 \quad \forall\, P \in \mathbf{R}[X] \quad ||\, P\,||'_\infty \leqslant \alpha\, ||\, P\,||_\infty$$
   ce qui équivaut à
   $$\forall\, (P_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}[X]^{\mathbf{N}} \quad P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{||\cdot||_\infty} 0_{\mathbf{R}[X]} \quad \Longrightarrow \quad P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{||\cdot||'_\infty} 0_{\mathbf{R}[X]}$$
   Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer $||\, P_n\,||_\infty$ et $||\, P_n\,||'_\infty$, où $P_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{X^k}{n}$.
   - Si $||\cdot||'_\infty$ domine $||\cdot||_\infty$ alors
   $$\exists\, \beta > 0 \quad \forall\, P \in \mathbf{R}[X] \quad ||\, P\,||_\infty \leqslant \beta\, ||\, P\,||'_\infty$$
   ce qui équivaut à
   $$\forall\, (P_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}[X]^{\mathbf{N}} \quad P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{||\cdot||'_\infty} 0_{\mathbf{R}[X]} \quad \Longrightarrow \quad P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{||\cdot||_\infty} 0_{\mathbf{R}[X]}$$
   On pourra observer que la fonction polynomiale de degré 2
   $$f \;\left|\; \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x(1-x) \end{array}\right.$$
   est positive, de maximum $\dfrac{1}{4}$ atteint en $x = \dfrac{1}{2}$. Calculer ensuite $||\, P^n\,||'_\infty$ et $||\, P^n\,||_\infty$, où $P := X(1-X)$.
3. Que dire de deux normes sur un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie ?

`comparaisonNormesEspacePolynomes2` [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 3

1.
   - Si une fonction $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ est positive, continue et d'intégrale nulle sur $[0,1]$, alors cette fonction est identiquement nulle sur $[0,1]$.
   - Un polynôme de $\mathbf{R}[X]$ possédant une infinité de racines est nécessairement le polynôme nul, i.e. que tous ses coefficients sont nuls.
2.
   - Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. Observer que
   $$\forall\, x \in [0,1] \quad |P(x)| \leqslant ||\, P\,||'_\infty$$
   et en déduire que la norme $||\cdot||'_\infty$ domine la norme $||\cdot||'_1$.
   - Les normes $||\cdot||'_\infty$ et $||\cdot||'_1$ sont donc équivalentes si et seulement si
   $$\exists\, \alpha > 0 \quad \forall\, P \in \mathbf{R}[X] \quad ||\, P\,||'_\infty \leqslant \alpha\, ||\, P\,||'_1$$
   donc si et seulement si
   $$\forall\, (P_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}[X]^{\mathbf{N}} \quad P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{||\cdot||'_1} 0_{\mathbf{R}[X]} \implies P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{||\cdot||'_\infty} 0_{\mathbf{R}[X]}$$
   Pour établir que les normes $||\cdot||'_\infty$ et $||\cdot||'_1$ ne sont pas équivalentes, il suffit donc de construire une suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}[X]^{\mathbf{N}}$ telle que
   $$P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{||\cdot||'_1} 0_{\mathbf{R}[X]} \quad \text{et} \quad P_n \underset{n\to+\infty}{\overset{||\cdot||'_\infty}{\not\longrightarrow}} 0_{\mathbf{R}[X]}$$



3. Que dire de deux normes sur un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie ?

normeSubordonneeProduitScalaireHermitienEspaceSuites [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 7

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$
$$|\overline{x_n}\, y_n| = |x_n\, y_n| \leqslant \frac{|x_n|^2}{2} + \frac{|y_n|^2}{2}$$
car $(|x_n| - |y_n|)^2 \geqslant 0$ (le carré d'un nombre réel est positif).
2. Pour la stabilité de ℓ^2 par somme, on pourra considérer $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^2$, $y = (y_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^2$ et observer que
$$\forall\, n \in \mathbf{N} \quad |x_n + y_n|^2 = (x_n + y_n)\, (\overline{x_n} + \overline{y_n}) = |x_n|^2 + |y_n|^2 + x_n\, \overline{y_n} + \overline{x_n}\, y_n$$
et appliquer le résultat de la question 1.
3. Pour l'inégalité triangulaire, on pourra commencer par démontrer que
$$\forall\, x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^2 \quad \forall\, y = (y_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^2 \quad |\langle\, x\,,\, y\,\rangle| \leqslant ||\, x\,||\ ||\, y\,|| \qquad \text{[inégalité de Cauchy-Schwarz]}$$
en considérant d'abord le cas où $||\, x\,|| = ||\, y\,|| = 1$.
4.
   - Comparer, pour tout $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^2$, les nombres réels positifs $|x_{n_0}|^2$ et $||\, x\,||^2 := \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2$.
   - On dispose d'un critère de continuité pour les applications linéaires.
   - Déduire du premier point que $|||\, \varphi\, ||| \leqslant 1$.
   - Vérifier que $x := (\, \delta_{n,n_0}\,)_{n\in\mathbf{N}}$ appartient à ℓ^2, puis calculer $|\varphi(x)|$ et $||\, x\,||$.

`doubleLimiteEvaluationEndomorphismeContinu` [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 8

- Il s'agit de démontrer que l'application

$$B \left| \begin{array}{ccc} (\mathcal{L}_c(E), |||\cdot|||) \times (E, ||\cdot||) & \longrightarrow & (E, ||\cdot||) \\ (u,x) & \longmapsto & u(x) \end{array} \right.$$

  est continue, où l'espace vectoriel $(\mathcal{L}_c(E), |||\cdot|||) \times (E, ||\cdot||)$ est muni de la norme produit

$$N_\infty \left| \begin{array}{ccc} (\mathcal{L}_c(E), |||\cdot|||) \times (E, ||\cdot||) & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ (u,x) & \longmapsto & \max\{|||\, u\, |||, ||\, x\, ||\} \end{array} \right.$$

- Vérifier que l'application B est bilinéaire.
- On dispose d'un critère de continuité pour les applications bilinéaires.

`normeSubordonneeDerivationDiscreteEspaceSuites` [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 9

- Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \ell^\infty$. Justifier que
$$|u_{n+1} - u_n| \leqslant 2 \,||\, u \,||_\infty$$
et déduire
$$\Delta(u) \in \ell^\infty \qquad \text{et} \qquad ||\, \Delta(u) \,||_\infty \leqslant 2 \,||\, u \,||_\infty$$
- On dispose d'un critère de continuité pour les applications linéaires.
- Déduire du premier point que $|||\, \Delta \,||| \leqslant 2$.
- Vérifier que $u = ((-1)^n)_{n \in \mathbf{N}}$ appartient à ℓ^∞, puis calculer $||\, \Delta(u) \,||_\infty$ et $||\, u \,||_\infty$.

`derivationEspaceFonctionsNormeInfinieDiscontinue` [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 10

- L'application Δ est linéaire.
- On sait que l'application Δ est continue si et seulement si

$$\forall\ (f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbf{R})^{\mathbf{N}} \qquad f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0_{\mathcal{C}^1([0,1],\mathbf{R})^{\mathbf{N}}} \quad \Longrightarrow \quad \Delta(f_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0_{\mathcal{C}^0([0,1],\mathbf{R})^{\mathbf{N}}} \tag{1}$$

- Pour un entier naturel n non nul fixé, considérer l'application

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array} \right.$$

  puis calculer $||\,\Delta(f_n)\,||_\infty$ et $||\,f_n\,||_\infty$.
- Modifier les fonctions f_n ($n \in \mathbf{N}^*$) pour nier l'assertion (1).

proprietesAdditionnellesNormeSubordonnee [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 11

1. • Comme $B(0_E,1) \subset \overline{B(0_E,1)}$ et $B(0_E,1) \subset \overline{B(0_E,1)}$

$$\sup_{x \in B(0_E,1)} \| u(x) \|_F \leqslant ||| u ||| \qquad \text{et} \qquad \sup_{x \in S(0_E,1)} \| u(x) \|_F \leqslant ||| u |||$$

• Soit $\varepsilon > 0$. D'après le critère séquentiel de la borne supérieure $||| u |||$

$$\exists\, x \in \overline{B(0_E,1)} \quad ||| u ||| - \varepsilon \leqslant \| u(x) \|_F \tag{2}$$

Démontrer que

$$\exists\, (x_n)_{n \in N} \in B(0_E,1)^{\mathbf{N}} \quad \| u(x_n) \|_F \xrightarrow[n \to +\infty]{} \| u(x) \|_F \tag{3}$$

puis déduire de (2) et (3) que

$$\exists\, N \in \mathbf{N} \quad ||| u ||| - \varepsilon \leqslant \| u(x_N) \|_F \leqslant \sup_{x \in B(0_E,1)} \| u(x) \|_F$$

• Déduire des deux points précédents que

$$\sup_{x \in B(0_E,1)} \| u(x) \|_F = ||| u |||$$

• Justifier que

$$\forall\, x \in \overline{B(0_E,1)} \setminus \{0_E\} \quad \left\| u\left(\frac{x}{\| x \|_E} \right) \right\|_F \leqslant \sup_{y \in S(0_E,1)} \| u(y) \|_F$$

puis que

$$\forall\, x \in \overline{B(0_E,1)} \quad \| u(x) \|_F \leqslant \sup_{y \in S(0_E,1)} \| u(y) \|_F$$

• Déduire du premier et du dernier point que

$$\sup_{x \in S(0_E,1)} \| u(x) \|_F = ||| u |||$$

2. • Que dire d'une partie fermée et bornée d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie ?
• Appliquer le théorème des bornes atteintes à l'application

$$\left| \begin{array}{ccc} S(0_E,1) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \| u(x) \|_F \end{array} \right.$$

3. (a) • Soit $f \in E$. Remarquer que

$$\forall\, x \in [0,1] \quad |u(f)(x)| = \left| \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_0^x |f(t)|\ \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 |f(t)|\ \mathrm{d}t = \| f \|_1$$

pour en déduire une majoration de $\| u(f) \|_1$.
• On dispose d'un critère de continuité pour les applications linéaires.

(b) • Déduire de la question 3.(a) que

$$||| u ||| \leqslant 1$$

• Pour un entier naturel $n \in \mathbf{N}$ fixé, considérer l'application

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & n\, e^{-nt} \end{array} \right.$$

puis calculer $\| f_n \|_1$ et $\| u(f_n) \|_1$.

(c) • Raisonner par l'absurde et supposer que

$$\exists\, f \in \overline{B(0_E,1)} \quad \| u(f) \|_1 = 1$$

Alors $f \neq 0_E$ et, quitte à remplacer f par $\dfrac{f}{\| f \|_1}$, on peut supposer que $\| f \|_1 = 1$, i.e. $f \in S(0_E,1)$.
• Reprendre alors les inégalités évoquées à la question 3.(a).

$$1 = \int_0^1 \left| \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t \right|\ \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \int_0^x |f(t)|\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \int_0^1 |f(t)|\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \| f \|_1\ \mathrm{d}x = 1$$

En déduire que

$$\forall\, x \in [0,1] \qquad \int_0^x |f(t)|\ \mathrm{d}t = 1$$

et conlure à une contradiction.