TD – Espaces vectoriels normés 2

Notation. — La lettre $\mathbf{K}$ désigne le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Exercice 1 ★☆☆ — *L'image réciproque d'un compact par une application continue est-elle nécessairement compacte ?*

imageReciproqueCompactApplicationContinue [indication(s)]

Exercice 2 ★☆☆ — *On munit $\mathbf{R}^2$ de la norme $||\cdot||_\infty$.*

1. *La partie $A = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x^2 + y^3 = 1\right\}$ de $\mathbf{R}^2$ est-elle compacte ?*
2. *La partie $B = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x^2 + xy + y^2 \leqslant 2\right\}$ de $\mathbf{R}^2$ est-elle compacte ?*

compacitePartiesR2 [indication(s)]

Exercice 3 ★☆☆ — *Soient $(E, ||\cdot||)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé et A, B deux parties de E. On pose*

$$A + B = \{a + b \ : \ (a,b) \in A \times B\}$$

1. *On suppose A et B compactes. Démontrer que $A + B$ est compacte.*
2. *On suppose que A fermée dans E et B compacte. Démontrer que $A + B$ est fermée.*
3. *Si A et B sont fermées dans E, $A + B$ est-elle nécessairement fermée dans E ?*

sommeCompactCompactSommeFermeCompact [indication(s)]

Exercice 4 ★☆☆ — *Soient $(E, ||\cdot||)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé, U une partie ouverte de E et x un vecteur de U dont la composante connexe par arcs dans U est notée $\mathcal{C}_x$.*

1. *Démontrer que $\mathcal{C}_x$ est une partie ouverte de E.*
2. *En déduire que toute partie ouverte de $\mathbf{R}$ est réunion d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.*

composantesConnexesOuvertDescriptionOuvertsR [indication(s)]

Exercice 5 ★★☆ — *Soit $d \in \mathbf{N}^*$. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de vecteurs de $\left(\mathbf{R}^d, ||\cdot||_\infty\right)$, dont l'ensemble des valeurs d'adhérence est noté $\mathcal{V}$. Pour tout $p \in \mathbf{N}$, on pose*

$$U_p := \{u_k \ : \ k \geqslant p\}$$

1. *Démontrer $\mathcal{V} = \bigcap_{p\in\mathbf{N}} \overline{U_p}$.*
2. *En déduire que, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée, alors l'ensemble $\mathcal{V}$ de ses valeurs d'adhérence est compact.*

ensembleValeursAdherenceSuiteIntersectionFermes [indication(s)]

Exercice 6 ★★☆ — *Soit $(E, ||\cdot||)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé non réduit à $\{0_E\}$. On définit le diamètre d'une partie bornée non vide A de E par*

$$\delta(A) := \sup\left\{||\,x - y\,|| \ : \ (x,y) \in A^2\right\}$$

1. *Justifier que, pour toute partie A bornée non vide de E, $\delta(A)$ est un nombre réel bien défini.*
2. *Soit $(a,r) \in E \times \mathbf{R}_+^*$. Démontrer que $\delta(B(a,r)) = 2r$.*
3. *Soit K une partie compacte non vide de E. Démontrer qu'il existe des vecteurs x, y de K tels que $\delta(K) = ||\,x - y\,||$.*

4. *Soit $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de parties compactes non vides de E, décroissante pour l'inclusion. Démontrer que*
$K := \bigcap_{n\in\mathbf{N}} K_n$ *est un compact non vide et que* $\delta(K_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{|\cdot|} \delta(K)$.
5. *Une intersection de parties fermées non vides, décroissante pour l'inclusion, est-elle nécessairement non vide ?*

`diametreIntersectionDecroissanteCompacts` [indication(s)]

Exercice 7 ★★☆ — *Soient $(E, ||\cdot||)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé, K une partie compacte de E et $f\colon K\to K$ une application telle que*

$$\forall\,(x_1,x_2)\in K^2 \quad x_1\neq x_2 \implies ||\,f(x_1)-f(x_2)\,|| < ||\,x_1-x_2\,||$$

1. *Démontrer que l'application f possède un unique point fixe, noté α. On pourra considérer l'application qui à un vecteur x de K associe le nombre réel $||\,f(x)-x\,||$.*
2. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par la donnée de $x_0\in K$ et la relation de récurrence*
$$x_{n+1} = f(x_n)$$
valable pour tout $n\in\mathbf{N}$. Démontrer que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{||\cdot||} \alpha$.

`theoremePointFixeCompactApplicationPresqueContractante` [indication(s)]

Exercice 8 ★★☆ — *Soient $(E, ||\cdot||)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé, K une partie compacte de E et $f\colon K\to K$ une application telle que*

$$\forall\,(x,y)\in K^2 \quad ||\,f(x)-f(y)\,|| \geqslant ||\,x-y\,|| \qquad [f \text{ est une dilatation}]$$

Soient x, y deux vecteurs de K.

1. *Démontrer qu'il existe une application $\varphi\colon\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ strictement croissante telle que les suites $\left(f^{\varphi(n)}(x)\right)_{n\in\mathbf{N}}$ et $\left(f^{\varphi(n)}(y)\right)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent dans K.*
2. *Démontrer que* $f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ *et* $f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(y) \xrightarrow[n\to+\infty]{} y$.
3. *En déduire que $||\,f(x)-f(y)\,|| = ||\,x-y\,||$.*
4. *Démontrer que l'application f est continue et bijective.*

`dilatationCompactIsometrieBijective` [indication(s)]

Exercice 9 ★★☆ — *Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie $n\geqslant 1$, N une norme sur E, $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E et*

$$N_\infty \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x=\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\,e_i & \longmapsto & N_\infty(x)=\displaystyle\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i| \end{array}\right.$$

1. *Démontrer que*
$$\exists\,\alpha>0 \quad \forall\,x\in E \quad N(x)\leqslant \alpha\,N_\infty(x)$$
2. *Justifier que $S_\infty(0_E,1)=\{x\in E \;:\; N_\infty(x)=1\}$ est une partie compacte de (E,N_∞).*
3. *Démontrer que l'application*
$$f \left| \begin{array}{ccc} S_\infty(0_E,1) & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x & \longmapsto & N(x) \end{array}\right.$$
admet un minimum m strictement positif.

4. *En déduire que*

$$\exists\, \beta > 0 \quad \forall\, x \in E \quad N_\infty(x) \leqslant \beta\, N(x)$$

5. *Justifier qu'une partie de E est ouverte pour la norme N si et seulement elle est ouverte pour la norme N_∞. Qu'en déduire de plus ?*

`normesEquivalentesEspaceVectorielDimensionFinie`

Exercice 10 ★★★ — *Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme de degré $n \geqslant 1$. On se propose de démontrer que P possède une racine complexe (théorème de d'Alembert-Gauß).*

1. *Démontrer qu'il existe $z_0 \in \mathbf{C}$ tel que*

$$|P(z_0)| = \min\{|P(z)| \;:\; z \in \mathbf{C}\}$$

2. *D'après la formule de Taylor exacte, appliquée au polynôme P au point z_0, nous savons*

$$\forall\, z \in \mathbf{C} \quad P(z_0 + z) = \sum_{k=0}^{n} b_k\, z^k$$

où, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $b_k = \dfrac{P^{(k)}(z_0)}{k!}$. Nous raisonnons par l'absurde et supposons que $b_0 \neq 0$.

   (a) *Justifier l'existence de $\ell := \min\{k \in [\![1, n]\!] \;:\; b_k \neq 0\}$.*

   (b) *Soit $\omega \in \mathbf{C}$ une racine k-ième de $-\dfrac{b_0}{b_k}$. Justifier l'existence d'une fonction $\varepsilon \in \mathbf{C}^{[0,1]}$ telle que*

$$\forall\, t \in [0,1] \quad P(z_0 + \omega\, t) = b_0 - b_0\, t^k + b_0\, t^k\, \varepsilon(t) \qquad \text{et} \qquad \varepsilon(t) \xrightarrow[t \to 0^+]{} 0$$

   (c) *En déduire qu'il existe $\alpha \in \,]0,1[$ tel que, $|P(z_0 + \omega\, \alpha)| < |P(z_0)|$ et conclure.*

`theoremedAlembertGaussTopologie`

Exercice 11 ★★★ — *Soient $(E, ||\cdot||)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé.*

1. *Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E pour laquelle il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tous entiers naturels $n \neq p$, on ait $||\, x_n - x_p\, || \geqslant \varepsilon$. Démontrer que cette suite n'admet aucune suite extraite convergente.*
2. *Soit K un sous-ensemble compact de E. Démontrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $p > 0$ et $x_1, \ldots, x_p$ éléments de E tels que $K \subseteq \displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} B(x_i, \varepsilon)$. On pourra raisonner par l'absurde.*
3. *On considère une famille $(\Omega_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles ouverts de E, I étant un ensemble quelconque, telle que*
   $K \subseteq \displaystyle\bigcup_{i \in I} \Omega_i$.

   (a) *Démontrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in K$, il existe $i \in I$ tel que $B(x, \alpha)$ soit contenue dans l'ouvert Ω_i. On pourra raisonner par l'absurde pour construire une suite d'éléments de K n'ayant aucune suite extraite convergente.*

   (b) *En déduire qu'il existe une sous-famille finie $(\Omega_{i_1}, \ldots, \Omega_{i_p})$ de la famille $(\Omega_i)_{i \in I}$ telle que $K \subseteq \displaystyle\bigcup_{k=1}^{p} \Omega_{i_k}$ (propriété de Borel-Lebesgue).*
4. *Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de fermés de E contenus dans K et d'intersection vide, i.e $\displaystyle\bigcap_{i \in I} F_i = \varnothing$. Démontrer qu'il existe une sous famille finie $(F_{i_1}, \ldots, F_{i_p})$ de la famille $(F_i)_{i \in I}$ telle que $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{p} F_{i_k} = \varnothing$.*

`proprieteBorelLebesgueMinesPonts2Mp2017` [corrigé]

`imageReciproqueCompactApplicationContinue` [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 1

On peut commencer par envisager une application continue $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. D'après le cours :

- une partie de $\mathbf{R}$ est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée ;
- l'image réciproque d'un fermé de $\mathbf{R}$ par f est un fermé de $\mathbf{R}$.

Aussi nous intéressons-nous à la question suivante : l'image réciproque d'une partie bornée de $\mathbf{R}$ par f est-elle nécessairement une partie bornée de $\mathbf{R}$? On pourra, par exemple, spécifier f à la fonction arctangente.

`compacitePartiesR2` [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 2

D'après le cours, une partie de $(\mathbf{R}^2, ||\cdot||_\infty)$ est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

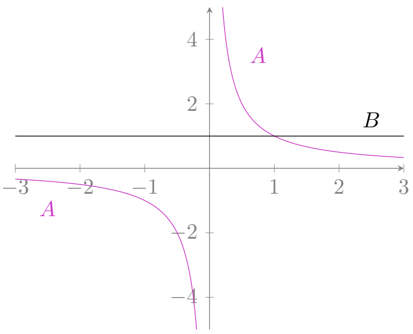
1. *La partie A n'est pas bornée.* Pour le justifier, on peut construire une suite $((x_n, y_n))_{n\in\mathbf{N}}$ de vecteurs de A telle que
$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{|\cdot|} +\infty \qquad \text{et} \qquad y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{|\cdot|} -\infty$$
2. Démontrer que la partie B de $(\mathbf{R}^2, ||\cdot||_\infty)$ est fermée et bornée.
   - *La partie B est bornée.* En remarquant que
   $$\forall\,(x,y)\in\mathbf{R}^2 \quad |xy| \leqslant \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$$
   on établit que B est bornée pour la norme $||\cdot||_2$. De plus nous savons comparer les normes $||\cdot||_2$ et $||\cdot||_\infty$ sur $\mathbf{R}^2$.
   - *La partie B est fermée.* Pour démontrer le caractère fermé de B, on peut considérer l'application
   $$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+xy+y^2 \end{array} \right.$$
   qui est polynomiale.

sommeCompactCompactSommeFermeCompact [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 3

1. L'application
$$f \left| \begin{array}{ccc} A \times B & \longrightarrow & A+B \\ (a,b) & \longmapsto & a+b \end{array} \right.$$
est surjective.
2. Considérer une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de vecteurs de $A+B$ qui converge vers un vecteur x de E. Alors :
$$\forall\, n \in \mathbf{N} \quad \exists\,(a_n, b_n) \in A \times B \quad x_n = a_n + b_n$$
Comme B est compacte, la suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de vecteurs de B possède une valeur d'adhérence $b \in B$.
3. Dans $(\mathbf{R}^2, ||\cdot||_\infty)$, on peut considérer
   - la parabole $A := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \;:\; xy = 1\}$
   - la droite affine $B := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \;:\; y = 1\}$.

   et démontrer que
$$\begin{aligned} A + B &= \left\{ \left(x_1 + x_2, \frac{1}{x_1} + 1 \right) \;:\; (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R} \right\} \\ &= \mathbf{R} \times (\mathbf{R} \setminus \{1\}) \qquad \text{[égalité d'ensembles à prouver]} \end{aligned}$$
   n'est pas une partie fermée de $(\mathbf{R}^2, ||\cdot||_\infty)$.



composantesConnexesOuvertDescriptionOuvertsR [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 4

1. On rappelle que $\mathcal{C}_x$ est, par définition, l'ensemble des vecteurs y de U pour lesquels il existe un chemin joignant x à y tracé dans U. Soit $y \in \mathcal{C}_x$. Comme U est une partie ouverte de E, il existe un réel $r_y > 0$ tel que $B(y, r_y) \subset U$. Démontrer que $B(y, r_y) \subset \mathcal{C}_x$, en commençant par construire, pour tout vecteur $z \in B(y, r_y)$, un chemin joignant z à y tracé dans U.
2. Soit U un ouvert de $\mathbf{R}$. D'après le cours
   - U est la réunion de ses composantes connexes par arcs, qui sont deux à deux disjointes ;
   - une partie de $\mathbf{R}$ est connexe par arcs si et seulement si elle est un intervalle.

ensembleValeursAdherenceSuiteIntersectionFermes [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 5

1. Raisonner par double inclusion, en s'appuyant tant la caractérisation géométrique (i.e. *via* les boules) d'une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$

$$\forall x \in \mathbf{R}^d \quad x \in \mathcal{V} \iff (\,\forall \varepsilon > 0 \quad \{n \in \mathbf{N} \;:\; u_n \in B_\infty(x,\varepsilon)\} \text{ est une partie infinie de } \mathbf{N}\,)$$

que sur la caractérisation géométrique de l'adhérence d'une partie A de $\left(\mathbf{R}^d, ||\cdot||_\infty\right)$

$$\forall x \in \mathbf{R}^d \quad x \in \overline{A} \iff (\,\forall \varepsilon > 0 \quad A \cap B_\infty(x,\varepsilon) \neq \varnothing\,)$$

- *Inclusion de $\mathcal{V}$ dans $\bigcap\limits_{p\in\mathbf{N}} \overline{U_p}$.* Soit x une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $p \in \mathbf{N}^*$. Justifier que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble
$$U_p \cap B(x,\varepsilon)$$
est non vide.
- *Inclusion de $\bigcap\limits_{p\in\mathbf{N}} \overline{U_p}$ dans $\mathcal{V}$.* Soit $x \in \bigcap\limits_{p\in\mathbf{N}} \overline{U_p}$. En raisonnant par l'absurde, justifier que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble
$$\{n \in \mathbf{N} \;:\; u_n \in B_\infty(x,\varepsilon)\}$$
est une partie infinie de $\mathbf{N}$.

2. D'après le cours, une partie de $\left(\mathbf{R}^d, ||\cdot||_\infty\right)$ est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

diametreIntersectionDecroissanteCompacts [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 6

1. Soit A une partie bornée non vide de E. Comme A est bornée, il existe un réel $R > 0$ tel que $A \subset \overline{B(0, R)}$. Justifier alors que la partie $\{||\, x - y\, || \;:\; (x, y) \in A^2\}$ de $\mathbf{R}$ est non vide et majorée par $2R$.
2.
   - Commencer par justifier que $\delta(B(a, r)) \leqslant 2r$.
   - Pour établir l'inégalité inverse, remarquer que le $\mathbf{K}$-espace vectoriel $E \neq \{0_E\}$ contient un vecteur unitaire noté u. Ensuite, en prenant appui sur une figure, constuire une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}} \in [0 + \infty[^{\mathbf{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}$

     $$x_n := a - \lambda_n\, u \qquad \text{et} \qquad y_n := a + \lambda_n\, u$$

     appartiennent à $B(a, r)$ et vérifient $||\, x_n - y_n\, || \xrightarrow[n\to+\infty]{|\cdot|} 2r$.
3. D'après la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, il existe une suite $(x_n, y_n) \in (\mathbf{K} \times \mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ telle que $||\, x_n - y_n\, || \xrightarrow[n\to+\infty]{|\cdot|} \delta(K)$. La partie $K \times K$ est une partie compacte de $E \times E$, muni de la norme produit.
4.
   - *La partie K est non vide.* Constuire une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de vecteurs de E telle que

     $$\forall \in \mathbf{N} \quad x_n \in K_n$$

     Justifier que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ possède une valeur d'adhérence x dans K_0. Démontrer enfin que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x \in K_n$.
   - *La partie K est fermée.* D'après le cours, une intersection quelconque de parties fermées de E est une partie fermée de E.
   - *La partie K est compacte.* D'après le cours une partie fermée d'un compact est compacte.
   - *Comportement asymptotique de la suite de terme général $\delta(K_n)$.* Commencer par démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$

     $$\delta(K) \leqslant \delta(K_n) \leqslant \delta(K_{n+1})$$

     En déduire que la suite numérique de terme général $\delta(K_n)$ converge vers un réel $\ell \geqslant \delta(K)$. D'après la question 3, pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe $(x_n, y_n) \in K_n^2$ tel que $\delta(K_n) = ||\, x_n - y_n\, ||$. Justifier l'existence d'une application $\varphi \colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante et de deux vecteurs x, y de K_0 tels que

     $$x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{||\cdot||} x \qquad \text{et} \qquad y_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{||\cdot||} y$$

     Démontrer les vecteurs x, y appartiennent à K, puis que $\ell \leqslant \delta(K)$.
5. La suite $(F_n := [n, +\infty[\,)^{\mathbf{N}}$ est une suite parties fermées non vides de $\mathbf{R}$, décroissante pour l'inclusion.

`theoremePointFixeCompactApplicationPresqueContractante` [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 7

1.
   - *Unicité du point fixe.* Raisonner par l'absurde en supposant que l'application f possède deux points fixes distincts $\alpha_1, \alpha_2 \in K$.
   - *Existence du point fixe.* Appliquer le théorème des bornes atteintes à l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \|\, f(x) - x \,\| \end{array} \right.$$

   pour obtenir que l'application f possède un minimum atteint en un vecteur x_m de K. Démontrer alors que x_m est un point fixe de l'application f, en raisonnant par l'absurde.

2.
   - *Convergence de la suite de terme général* $\|\, x_n - \alpha \,\|$. Étudier le sens de variation de la suite numérique $(\|\, x_n - \alpha \,\|)_{n\in\mathbf{N}}$ pour établir sa convergence.
   - *Extraction d'une sous-suite convergente de la suite* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Justifier l'existence d'une application $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante et d'un vecteur x de K tel que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|} x$.
   - *Introduction d'une autre suite extraite de la suite* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Justifier

$$\left\|\, x_{\varphi(n)+1} - \alpha \,\right\| \xrightarrow[n\to+\infty]{|\cdot|} \|\, f(x) - f(\alpha) \,\|$$

   - *Conclusion.* Des trois points précédents, déduire que $\|\, x - \alpha \,\| = \|\, f(x) - f(\alpha) \,\|$, puis $x = \alpha$ en raisonnant par l'absurde.

`dilatationCompactIsometrieBijective` [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 8

1. Considérer les suites $(f^n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ et $(f^n(y))_{n\in\mathbf{N}}$ de vecteurs de K. La partie $K\times K$ est une partie compacte de $E\times E$, muni de la norme produit.
2. Démontrer que, pour tout $n\in\mathbf{N}$
$$\left|\left| f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(x)-x \right|\right| \leqslant \left|\left| f^{\varphi(n+1)}(x)-f^{\varphi(n)}(x) \right|\right|$$
puis que $\left|\left| f^{\varphi(n+1)}(x)-f^{\varphi(n)}(x) \right|\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{|\cdot|} 0$.
3. Démontrer que, pour tout $n\in\mathbf{N}$
$$||\,x-y\,|| \leqslant ||\,f(x)-f(y)\,|| \leqslant \left|\left| f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(x)-f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(y) \right|\right|$$
4.
   - *Continuité de l'application f.* D'après le cours, une application lipschitienne est (uniformément) continue.
   - *Injectivité de l'application f.* Considérer la propriété de dilatation.
   - *Surjectivité de l'application f.* Soit $x\in E$. D'après la question 2, x est limite d'une suite de vecteurs de $f(E)$. L'image d'un compact par une application continue est compacte donc fermée.

proprieteBorelLebesgueMinesPonts2Mp2017 [énoncé]

Un corrigé de l'exercice 11

1. Par l'absurde, on suppose qu'il existe une suite extraite $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ convergente. La suite $\left(x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge donc vers 0. Ceci nous fournit $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $p \geqslant N$, on ait $\left|\left| x_{\varphi(p+1)} - x_{\varphi(p)} \right|\right| \geqslant \varepsilon$. Contradiction.
2. Par l'absurde, on suppose que la propriété à démontrer est fausse, ceci nous fournit $\varepsilon > 0$, tel que pour tout $p \in \mathbf{N}^*$ et $x_1, \dots, x_p$ éléments de E on ait $K \not\subset \bigcup\limits_{i=1}^{p} B(x_i, \varepsilon)$. On va construire, par récurrence, une suite $(x_k)_{k\geqslant 1}$ à valeurs dans K telle que pour tout entier naturel $n \neq p$, on ait $|| \, x_p - x_n \, || \geqslant \varepsilon$.
   - Par hypothèse, on a $K \not\subset B(a_1, \varepsilon)$ pour tout $a_1 \in E$, ce qui nous fournit $x_1 \in K \setminus B(a_1, \varepsilon)$.
   - Soit $k \in \mathbf{N}^*$. On suppose construits $x_1, \dots, x_k \in K$ tel que pour tout entier naturel $n \neq p \in [\![1, k]\!]$, on ait $|| \, x_p - x_n \, || \geqslant \varepsilon$. On a alors $K \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{p} B(x_i, \varepsilon) \neq \varnothing$, ce qui nous fournit $x_{k+1} \in K$ tel que pour tout entiers naturels $n \neq p \in [\![1, k+1]\!]$, on ait $|| \, x_p - x_n \, || \geqslant \varepsilon$.

   La suite ainsi construite $(x_k)_{k\geqslant 1}$ vérifie pour tout entiers naturels $n \neq p$, on a $|| \, x_p - x_n \, || \geqslant \varepsilon$. D'après la question 1, cette suite n'admet pas de valeur d'adhérence. Or il s'agit d'une suite à valeurs dans le compact K. Contradiction.
3. (a) Par l'absurde, on suppose que pour tout réel $\alpha > 0$, il existe $x \in K$, tel que pour tout $i \in I$, on ait $B(x, \alpha) \not\subset \Omega_i$. Ainsi pour $n \in \mathbf{N}^*$, ceci nous fournit $x_n \in K$ tel que pour tout $i \in I$, on ait $B\left(x_n, \dfrac{1}{n}\right) \not\subset \Omega_i$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ à valeurs dans le compact K admet une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}^*}$ qui converge vers une valeur d'adhérence $\ell \in K$. Comme $K \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} \Omega_i$, ceci nous fournit $j \in I$ tel que $\ell \in \Omega_j$. Comme Ω_j est un ouvert, ceci nous fournit $r > 0$ tel que $B(\ell, r) \subset \Omega_j$. Comme $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers ℓ, ceci nous fournit $N_1 \in \mathbf{N}^*$ tel que

   $$\forall n \geqslant N_1 \quad \left|\left| x_{\varphi(n)} - \ell \right|\right| \leqslant \frac{r}{3}$$

   Comme $\left(\dfrac{1}{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0, ceci nous fournit $N_2 \in \mathbf{N}^*$ tel que

   $$\forall n \geqslant N_2 \quad \frac{1}{\varphi(n)} \leqslant \frac{r}{3}$$

   On pose $p = \max\{\varphi(N_1), \varphi(N_2)\}$. Comme $\dfrac{2r}{3} < r$, on a d'après l'inégalité triangulaire

   $$B\left(x_p, \frac{1}{p}\right) \subset B(\ell, r)$$

   d'après l'inégalité triangulaire. Contradiction avec la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

   (b) À la question 2, on pouvait obtenir de façon analogue l'existence d'un entier $p > 0$ et $x_1, \dots, x_p$ éléments de K (preuve identique que pour E) tels que $K \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{p} B(x_j, \varepsilon)$. Pour $j \in [\![1, p]\!]$, ce qui est fait à la question 3.(a), nous fournit un indice $i_j \in I$ tel que $B(x_j, \alpha) \subseteq \Omega_{i_j}$.
4. On note pour $i \in I$, $O_i = E \setminus F_i$ qui est un ouvert de E par complémentaire et on a $K \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} O_i$. La question 3.(b) nous fournit une sous famille finie $(O_{i_1}, \dots, O_{i_p})$ telle que $K \subseteq \bigcap\limits_{k=1}^{p} O_{i_k}$. On a donc $K \bigcap \left(\bigcap\limits_{k=1}^{p} F_{i_k}\right) = \varnothing$. Comme pour tout $i \in I$, on a $F_i \subset K$, la sous famille finie $(F_{i_1}, \dots, F_{i_p})$ vérifie $\bigcap\limits_{k=1}^{p} F_{i_k} = \varnothing$.