TD – Espaces vectoriels normés 1

Notation. — La lettre $\mathbf{K}$ désigne le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1. Exercices d'application du cours

Exercice 1. — *Munissons $\mathbf{R}[X]$ des normes $||\cdot||_\infty$ et $||\cdot||'_\infty$ définies par, pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$:*

$$||P||_\infty = \max_{k\in\mathbf{N}} |[P]_k| \qquad \text{et} \qquad ||P||'_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$$

1. *Démontrer que $||\cdot||_\infty$ et $||\cdot||'_\infty$ sont des normes.*
2. *Existe-t-il une constante $\alpha \in \mathbf{R}_+$ telle que, pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, $||P||_\infty \leqslant \alpha\, ||P||'_\infty$?*
3. *Existe-t-il une constante $\beta \in \mathbf{R}_+$ telle que, pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, $||P||'_\infty \leqslant \beta\, ||P||_\infty$?*

Exercice 2. — *Munissons $\mathbf{R}[X]$ des normes $||\cdot||'_\infty$ et $||\cdot||'_1$ définies par, pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$:*

$$||P||'_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)| \qquad \text{et} \qquad ||P||'_1 = \int_0^1 |P(x)|\,\mathrm{d}x.$$

1. *Vérifier que $||\cdot||'_1$ est bien une norme sur $\mathbf{R}[X]$.*
2. *Existe-t-il une constante $\alpha \in \mathbf{R}_+$ telle que, pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, $||P||'_\infty \leqslant \alpha\, ||P||'_1$?*
3. *Existe-t-il une constante $\beta \in \mathbf{R}_+$ telle que, pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, $||P||'_1 \leqslant \beta\, ||P||'_\infty$?*

Exercice 3. — *Munissons $\mathbf{R}[X]$ des normes $||\cdot||_\infty$ et $||\cdot||'_\infty$ définies par, pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$:*

$$||P||_\infty = \max_{k\in\mathbf{N}} |[P]_k| \qquad \text{et} \qquad ||P||'_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|.$$

Notons $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de polynômes de terme général $P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$.

1. *Démontrer que $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée pour les normes $||\cdot||_\infty$ et $||\cdot||'_\infty$.*
2. *Démontrer que $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est divergente pour la norme $||\cdot||_\infty$.*
3. *Munissons $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbf{R})$ de la norme $||\cdot||'_\infty$ définie par, pour tout $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbf{R})$:*

   $$||f||'_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

   Démontrer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$, vue comme suite d'éléments de $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbf{R})$, converge. Déterminer sa limite.
4. *La suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge-t-elle dans $\left(\mathbf{R}[X], ||\cdot||'_\infty\right)$?*

Exercice 4. — *Munissons :*

$$\ell^\infty(\mathbf{R}) = \left\{u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \ :\ \text{la suite } u \text{ est bornée}\right\}$$

de la norme $||\cdot||_\infty$ définie par, pour tout $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^\infty(\mathbf{R})$:

$$||(u_n)_{n\in\mathbf{N}}||_\infty = \sup_{n\in\mathbf{N}} |u_n|$$

1. *Notons $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ la suite d'éléments de $\ell^\infty(\mathbf{R})$ telle que pour tout $k \in \mathbf{N}$, u_k soit la suite constante de terme général $\dfrac{1}{k+1}$. Démontrer que $u_k \xrightarrow[k\longrightarrow+\infty]{||\cdot||_\infty} 0$.*

2. *Notons $(v_k)_{k\in\mathbf{N}}$ la suite d'éléments de $\ell^\infty(\mathbf{R})$ définie de terme général $v_k = \left(\dfrac{k}{n+1}\right)_{n\in\mathbf{N}}$. La suite $(v_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est-elle bornée dans $(\ell^\infty, ||\cdot||_\infty)$?*
3. *La suite $(w_k)_{k\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\ell^\infty(\mathbf{R})$ de terme général $w_k = (\sin(kn))_{n\in\mathbf{N}}$ est-elle bornée ? Admet-elle une valeur d'adhérence ?*

Exercice 5. — *Munissons $\mathbf{R}[X]$ de la norme $||\cdot||_1$ définie par, pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$:*

$$||P||_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} |[P]_k|$$

Le sous-espace $F = \mathrm{Vect}\left(\left\{X^{2n} \ : \ n \in \mathbf{N}\right\}\right)$ de $\mathbf{R}[X]$ est-il fermé ?

Exercice 6. — *Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et N_1, N_2 deux normes sur E. Démontrer que les boules ouvertes $B_{N_1}(0,1)$ et $B_{N_2}(0,1)$ sont égales si et seulement si $N_1 = N_2$.*

Exercice 7. — *Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $p \geqslant 1$. Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, posons :*

$$||x||_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Soit $q \geqslant 1$ l'unique réel tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1. *Démontrer que, pour tout $(x,y) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$:*

$$x^{1/p}\, y^{1/q} \leqslant \frac{1}{p}\, x + \frac{1}{q}\, y \qquad [\textit{inégalité de Young}]$$

2. *Notons $\langle\ \cdot\ ,\ \cdot\ \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbf{R}^n$. Démontrer que, pour tout $(x,y) \in (\mathbf{R}^n)^2$, $|\langle x\ ,\ y\rangle| \leqslant ||x||_p\ ||y||_q$.*
3. *Soient $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$. En remarquant que :*

$$(|x_k| + |y_k|)^p = |x_k|\ (|x_k| + |y_k|)^{p-1} + |y_k|\ (|x_k| + |y_k|)^{p-1}$$

montrer que $||\cdot||_p$ est une norme sur $\mathbf{R}^n$.

4. *Démontrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, $||x||_p \xrightarrow[p \longrightarrow +\infty]{} ||x||_\infty$.*

Exercice 8. — *Soient $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$ et $p \geqslant 1$. Pour toute fonction $f \in E$, notons :*

$$||f||_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p \ \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.$$

1. *En s'inspirant de l'exercice 7, démontrer que $||\cdot||_p$ est une norme sur E.*
2. *Démontrer que, pour toute fonction $f \in E$, $||f||_p \xrightarrow[p \longrightarrow +\infty]{} ||f||_\infty$.*

Exercice 9. — *Notons $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$. Pour toute fonction $f \in E$, posons :*

$$N(f) = \int_0^1 e^x\ |f(x)|\ \mathrm{d}x$$

1. *Démontrer que N est une norme sur E.*
2. *Trouver la meilleure constante $\alpha \in \mathbf{R}_+$ telle que, pour tout $f \in E$, $N(f) \leqslant \alpha\ ||f||_\infty$.*
3. *Existe-t-il une constante $\beta \in \mathbf{R}_+$ telle que, pour tout $f \in E$, $||f||_\infty \leqslant \beta\, N(f)$?*

Exercice 10 (ENSEA). — *Notons $E = \mathbf{R}[X]$. Pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$ et tout $n \in \mathbf{N}$, posons :*

$$\theta_n(P) = \int_0^1 P(t)\, t^n\ \mathrm{d}t$$

Posons $N(P) = \sup_{n \in \mathbf{N}} |\, \theta_n(P)\, |$. *Démontrer que* $N(P)$ *est bien définie et qu'elle induit une norme sur* $\mathbf{R}[X]$.

Exercice 11 (TPE). — *Soit* $(E, ||\cdot||)$ *un espace vectoriel normé. Démontrer que* E *est le seul sous-espace vectoriel de* E *d'intérieur non vide.*

Exercice 12 (TPE). — *Soient* $(E, ||\cdot||)$ *un espace vectoriel normé et* $C \subset E$ *une partie convexe. Démontrer que l'adhérence et l'intérieur de* C *sont convexes.*

Exercice 13 (TPE). — *Notons* $\ell^2(\mathbf{R})$ *l'ensemble des suites* $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ *telles que la série* $\sum x_n^2$ *converge. Pour toute suite* $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \ell^2(\mathbf{R})$, *notons :*

$$||\, x\, ||_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2}$$

1. *Démontrer que* $\ell^2(\mathbf{R})$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.
2. *Démontrer que* $||\cdot||_2$ *est une norme sur* $\ell^2(\mathbf{R})$.
3. *Posons* F *l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang. Démontrer que* F *est un sous-espace vectoriel de* $\ell^2(\mathbf{R})$. *L'ensemble* F *est-il une partie fermée de* $\ell^2(\mathbf{R})$ *?*

Exercice 14. — *Pour tout* $n \in \mathbf{N}^*$, *notons* f_n *la fonction définie sur* $[0, 1]$ *par :*

$$\forall x \in [0,1] \quad \begin{cases} 0 & si\ \ 0 \leqslant x \leqslant 1 - 1/n \\ 2n \left(x - 1 + \dfrac{1}{n}\right) & si\ 1 - \dfrac{1}{n} < x < 1 - \dfrac{1}{2n} \\ -2n\ (x-1) & si\ 1 - \dfrac{1}{2n} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

1. *Tracer les courbes représentatives des fonctions* f_1, f_2, f_3, f_4.
2. *Démontrer que pour tout* $x \in [0, 1]$ *:*
$$f_n(x) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$$
3. *Est-ce que la suite* $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ *converge vers vers la fontion nulle dans* $(\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R}), ||\cdot||_\infty)$ *?*

Exercice 15. — *Soient* $(E, ||\cdot||)$ *un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel normé et* $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ *une suite telle que la suite réelle* $(||\, u_n\, ||)_{n \in \mathbf{N}}$ *tend vers* $+\infty$. *Démontrer que la suite* $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *n'a pas de valeur d'adhérence.*

Exercice 16. — *Posons, pour tout* $n \in \mathbf{N}$ *:*

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \cos(nx) \end{array} \right.$$

1. *Montrer que la suite* $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *converge vers la fonction nulle dans* $\left(\mathcal{C}^0([0, 2\pi], \mathbf{R}), ||\cdot||_1\right)$.
2. *Supposons que la suite* $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *admette une valeur d'adhérence* f *dans* $(\mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbf{R}), ||\cdot||_\infty)$. *On dispose alors d'une application* $\varphi\colon \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ *strictement croissante telle que :*
$$||\, f_{\varphi(n)} - f\, ||_\infty \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{\mathbf{R}} 0.$$
Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$ *:*
$$\left| f_{\varphi(n)}(0) - f_{\varphi(n)}\left(\frac{\pi}{2\, \varphi(n)}\right)\right| \leqslant 2\, ||\, f_{\varphi(n)} - f\, ||_\infty + \left| f(0) - f\left(\frac{\pi}{2\, \varphi(n)}\right)\right|$$
Que peut-on en déduire ?

Exercice 17. — *Soit* $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *une suite réelle.*

1. *On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée et possède une unique valeur d'adhérence. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.*
2. *Si on suppose seulement que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ possède une unique valeur d'adhérence, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge-t-elle nécessairement ?*

---

2. Exercices de la banque CCINP

Exercice 18 (Banque CCINP n°34). — *Soit A une partie non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E.*

1. *Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.*
2. *Soit $x \in E$. Démontrer que :*
$$x \in \bar{A} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbf{N}} \quad x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$$
3. *Démontrer que, si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\bar{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.*
4. *Démontrer que si A est convexe alors $\bar{A}$ est convexe.*

Exercice 19 (Banque CCINP n°35). — *Soient $(E, ||\cdot||_E)$ et $(F, ||\cdot||_F)$ deux espaces vectoriels normés.*

1. *Soient f une application de E dans F et a un point de E. On considère les propositions suivantes :*
   (P1) L'application f est continue en a.
   (P2) Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$.

   Prouver que les assertions P1 et P2 sont équivalentes.
2. *Soit A une partie dense dans E, et soient f et g deux applications continues de E dans F. Démontrer que si, pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$, alors $f = g$.*

Exercice 20 (Banque CCINP n°37). — *Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$. On pose, pour tout $f \in E$:*
$$N_\infty(f) = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)| \qquad \textit{et} \qquad N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|dt$$

1. *Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.*
2. *Démontrer qu'il existe $\alpha \in \mathbf{R}_+$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leqslant \alpha\, N_\infty(f)$.*
3. *Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.*
4. *Démontrer qu'il n'existe aucune constante $\beta \in \mathbf{R}_+$ telle que, pour tout $f \in E$, $N_\infty(f) \leqslant \beta\, N_1(f)$.*

Exercice 21 (Banque CCINP n°44). — *Soient E un espace vectoriel normé et A, B deux parties non vides de E.*

1. *(a) Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.*
   (b) Démontrer que :
$$A \subset B \quad \Longrightarrow \quad \overline{A} \subset \overline{B}$$
2. *Démontrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.*
3. *(a) Démontrer que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.*
   (b) Démontrer, à l'aide d'un exemple, que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée. On pourra prendre $E = \mathbb{R}$.

Exercice 22 (Banque CCINP n°45). — *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et A une partie non vide de E. On note $\overline{A}$ l'adhérence de A.*

1. *(a) Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.*
   (b) Prouver que, si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.

2. *On pose, pour tout $x \in E$:*

$$\mathrm{d}_A(x) = \inf_{a \in A} || \, x - a \, ||$$

   (a) *Soit $x \in E$. Prouver que :*

$$\mathrm{d}_A(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \overline{A}$$

   (b) *On suppose que A est fermée et que :*

$$\forall \, (x, y) \in E^2 \quad \forall \, t \in [0,1] \quad \mathrm{d}_A(t\, x + (1-t)\, y) \leqslant t \; \mathrm{d}_A(x) + (1-t) \; \mathrm{d}_A(y)$$

   Prouver que A est convexe.

---

3. Exercices de difficulté moyenne

Exercice 23. — *Munissons $\ell^\infty(\mathbf{R})$ de la norme $|| \cdot ||_\infty$ définie dans l'exercice 4.*

1. *Soit $(U_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\ell^\infty(\mathbf{R})$. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, U_k est une suite bornée notée $\left(u_n^{(k)}\right)_{n \in \mathbf{N}}$. Supposons que $(U_k)_{k \in \mathbf{N}}$ converge vers une suite $U = (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \ell^\infty(\mathbf{R})$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n^{(k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} u_n$.*
2. *Réciproquement, si pour tout $n \in \mathbf{N}$, la suite $\left(u_n^{(k)}\right)_{k \in \mathbf{N}}$ converge vers un réel u_n, la suite $(U_k)_{k \in \mathbf{N}}$ converge-t-elle vers la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$?*

Exercice 24. — *Soit une application $f \colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ polynomiale et non constante. Démontrer que, pour toute partie fermée F de $\mathbf{R}$, $f(F)$ est une partie fermée de $\mathbf{R}$.*

Exercice 25. — *Munissons $\ell^\infty(\mathbf{R})$ de la norme $|| \cdot ||_\infty$ définie dans l'exercice 4. Si $u \in \ell^\infty(\mathbf{R})$ et A est une partie non vide de $\ell^\infty(\mathbf{R})$, on définit la distance de u à A par :*

$$\mathrm{d}(u, A) = \inf_{a \in A} || \, u - a \, ||_\infty$$

1. *Notons $\mathcal{C}_0$ le sous-espace vectoriel de $\ell^\infty(\mathbf{R})$ constitué des suites convergeant vers 0. Déterminer la distance de la suite constante égale à 1 à $\mathcal{C}_0$.*
2. *Notons $\mathcal{C}$ le sous-espace vectoriel de $\ell^\infty(\mathbf{R})$ constitué des suites convergentes. Déterminer la distance de la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbf{N}}$ à $\mathcal{C}$.*

Exercice 26. — *Soient $(E, || \cdot ||)$ un espace vectoriel normé et $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E. Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite u est une partie fermée de E.*

Exercice 27. — *Soient $(E, || \cdot ||)$ un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé, $C \subset E$ un ouvert convexe de E, contenant 0, borné et symétrique par rapport à 0 (pour tout $x \in C$, $-x \in C$). Pour tout $x \in E$, posons :*

$$|| \, x \, ||_C = \inf \left\{ t > 0 \ : \ \frac{x}{t} \in C \right\}.$$

On dit que $|| \cdot ||_C$ est la jauge associée à C.

1. *Démontrer que $|| \cdot ||_C$ est bien définie sur E.*
2. *Démontrer que $|| \cdot ||_C$ est une norme sur E.*
3. *Quelle est la boule unité ouverte pour la norme $|| \cdot ||_C$?*

Exercice 28. — *Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme réel de degré $n \geqslant 2$ scindé à racines simples sur $\mathbf{R}$. Démontrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon \in [-\alpha, \alpha]$, le polynôme $P(X) + \varepsilon \, X^{n+1}$ est scindé à racines simples dans $\mathbf{R}$.*

Exercice 29. — *Le but de cet exercice est de montrer que toute suite réelle possède une suite extraite monotone. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite réelle. On pose :*

$$E = \{ n \in \mathbf{N} \ : \ \forall \, p > n \quad u_p < u_n \}$$

1. *On suppose que E est infini. En utilisant les éléments de E, construire une suite extraite de u qui est strictement décroissante.*
2. *On suppose maintenant que E est fini et non vide. Soit $N = \max(E)$. Justifier que si $n > N$, alors il existe $p > n$ tel que $u_p \geqslant u_n$, puis en déduire une construction d'une suite extraite de u qui est croissante.*
3. *Démontrer que u possède une suite extraite monotone.*
4. *En déduire une nouvelle démonstration du théorème de Bolzano-Weierstraß.*

Exercice 30 (Centrale). — *Posons $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbf{R})$. Pour toute fonction $f \in E$, notons :*

$$N(f) = \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(x)^2 \, \mathrm{d}x}.$$

1. *Démontrer que N est une norme sur E.*
2. *Existe-t-il une constante $\alpha \in \mathbf{R}_+$ telle que, pour tout $f \in E$, $N(f) \leqslant \alpha \, || f ||_\infty$?*
3. *Existe-t-il une constante $\beta \in \mathbf{R}_+$ telle que, pour tout $f \in E$, $|| f ||_\infty \leqslant \beta \, N(f)$?*

Exercice 31 (Centrale). — *Soient $a \in \,]-1,1[$ et $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de réels. Démontrer que :*

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u_{n+1} - a\, u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Exercice 32. — *Munissons $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$ de la norme $|| \cdot ||_\infty$ de la convergence uniforme. Les parties de E suivantes sont-elles ouvertes ? fermées ?*

$$I = \{f \in E \ : \ f \text{ est injective}\} \qquad S = \{f \in E \ : \ f \text{ est surjective}\} \qquad B = \{f \in E \ : \ f \text{ est bijective}\}$$

Exercice 33. — *Munissons $\mathbf{R}^2$ de la norme $|| \cdot ||_2$ et notons C le cercle unité. Soit $f : C \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. Démontrer qu'il existe $M \in C$ tel que $f(-M) = f(M)$.*

Exercice 34. — *Soit $(E, || \cdot ||)$ un espace vectoriel normé. H un hyperplan de E. Démontrer que H est soit fermé soit dense dans E.*

Exercice 35 (Mines Ponts). — *On munit $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$ de la norme $|| \cdot ||_\infty$ de la convergence uniforme.*

On se propose de démontrer le théorème de Weierstraß, énoncé ci-dessous.

Karl Weierstraß (1815-1897)

Théorème. — Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$, il existe une suite de polynômes à coefficients réels $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$, telle que :

$$P_n \xrightarrow[n \to +\infty]{|| \cdot ||_\infty} f$$

Ici les polynômes sont identifiés à leurs fonctions polynomiales associées de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$.

Pour ce faire, fixons une fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$ et un réel $\varepsilon > 0$.

1. *Justifier que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbf{N}$:*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \, (1-x)^{n-k} = 1 \qquad \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k \, (1-x)^{n-k} = n\, x \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k \, (1-x)^{n-k} = n\, x + n\,(n-1)\, x^2$$

2. *En déduire que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbf{N}$:*

$$\sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant C\, n$$

pour une constante $C > 0$ à préciser.

3. *Justifier l'existence de $\alpha > 0$ tel que, pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$:*

$$|x-y| < \alpha \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

4. *Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit le polynôme de Bernstein :*

$$B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$$

Soit $x \in [0,1]$. On partitionne les entiers k entre 0 et n en :

$$X = \left\{k \in [\![0,n]\!] \ : \ \left|x - \frac{k}{n}\right| < \alpha\right\} \quad et \quad Y = \left\{k \in [\![0,n]\!] \ : \ \left|x - \frac{k}{n}\right| \geqslant \alpha\right\}$$

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$|B_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon + 2\, \|\, f \,\|_\infty \sum_{k \in Y} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

Sergueï Bernstein (1880-1968)

5. *Conclure qu'il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, $\|\, B_n - f \,\|_\infty \leqslant 2\,\varepsilon$.*

---

4. Exercices difficiles

Exercice 36. — *Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels telle que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de u est un intervalle.*

Exercice 37 (Mines Ponts). — *Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels telle que $u_{n+1} - u_{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de u est soit infini, soit fini de cardinal inférieur ou égal à 2.*

Exercice 38. — *Soient un entier $n \geqslant 2$, $\mathcal{D}'_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $\mathcal{T}'_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices trigonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Démontrer que l'adhérence de $\mathcal{D}'_n(\mathbf{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est $\mathcal{T}'_n(\mathbf{R})$. On pourra commencer par établir que, pour tout $A \in \mathcal{T}'_n(\mathbf{R})$, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ telle que $P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure.*

Exercice 39. — *Munissons $\mathcal{M}_p(\mathbf{C})$ de la norme définie par, pour tout $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{C})$:*

$$\|\, A \,\| = \max_{(i,j)\in[\![1,p]\!]} |\, [A]_{i,j} \,|$$

1. *Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{C})$ telle que la suite $(\|\, A^n \,\|)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée. Démontrer que les valeurs propres de A sont toutes de module inférieur ou égal à 1.*
2. *Soit $B \in \mathcal{M}_p(\mathbf{C})$. On suppose que la suite $(B^n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers une matrice $C \in \mathcal{M}_p(\mathbf{C})$.*
   (a) *Démontrer que $C^2 = C$ et $\mathrm{Spec}_{\mathbf{C}}(C) \subset \{0,1\}$.*
   (b) *Démontrer que les valeurs propres de B sont toutes de module inférieur ou égal à 1 et qu'une valeur propre de B de module 1 est égale à 1.*

Exercice 40 (Mines Ponts). — *On munit $[0,1]^2$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit K une partie fermée de $[0,1]^2$ telle que, pour tout $x \in [0,1]$, l'ensemble :*

$$F_x := \{y \in [0,1] \ : \ (x,y) \in K\}\,.$$

est un intervalle non vide. Démontrer que K intersecte la droite d'équation $y = x$.

Exercice 41 (X). — *Déterminer toutes les applications $f\colon \mathbf{U} \longrightarrow \mathbf{U}$ continues telles que, pour tout $(z_1,z_2) \in \mathbf{U}^2$:*

$$f(z_1\, z_2) = f(z_1)\, f(z_2)$$

Exercice 42 (X). — *Que dire d'une partie convexe et dense d'un espace vectoriel normé ?*

Exercice 43 (X). — *Soit un entier $n \geqslant 2$. Déterminer l'adhérence et l'intérieur de l'ensemble $\mathcal{D}'_n(\mathbf{C})$ des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.*

Exercice 44 (X). — *Soit un entier $n \geqslant 2$. Déterminer les matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dont la classe similitude, i.e. l'ensemble :*

$$\left\{P^{-1}AP \ : \ P \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{C})\right\}$$

est fermée.

Exercice 45 (X). — *Soient un entier $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Démontrer que A est nilpotente si et seulement si il existe une suite $(A_k)_{k\in\mathbf{N}}$ de matrices semblables à A convergeant vers 0.*

Exercice 46 (ÉNS). — *Soit un entier $n \geqslant 2$. Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles que la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbf{N}}$ est bornée.*
