Fin du cours :

$$(\mathcal{E}) : x^{(4)} = x \ , \quad x \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

x est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si :

$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ x'' \\ x''' \end{pmatrix}$ est solution de :

$$X' = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} X \ , \quad X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C}))$$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$

$$= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} + (-1)^5(-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^4 - 1$$

$$= \prod_{\xi \in \mathbb{U}_4} (\lambda - \xi)$$

Donc $\mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(A) = \mathbb{U}_4$,

et $\forall \xi \in \mathbb{U}_4$, $\dim(E_{\xi}(A)) = 1$.

$$\left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ t \longmapsto A \end{array} \right.$$ continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

Par le théorème de Cauchy linéaire, $Sol(S)$ ~~Sol(S)~~ est un sous-espace vectoriel de dimension 4 de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C}))$.

Pour résoudre $(\mathcal{E})$, il suffit de trouver 4 solutions linéairement indépendantes.

Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(A)$, $V \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$ vecteur propre associé à λ.

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}.$$

$$X \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C}) \\ t \longmapsto e^{\lambda t} V \end{array} \right.$$ solution de (S)

♡

X est $\mathcal{C}^1$ car ses composantes le sont, et si $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} X'(t) = \lambda e^{\lambda t} V &= e^{\lambda t} \lambda V \\ &= e^{\lambda t} A V \\ &= A X(t) \end{aligned}$$

TD "EDL" : Exercice 13 :

$(\mathcal{E}) : 4xy'' + 6y' + y = 0$

Sur $]0;+\infty[$: $(\mathcal{E}) : y'' = -\frac{3}{2x}y' - \frac{1}{4x}y$

$a_0 : x \longmapsto -\frac{1}{4x}$, $a_1 : x \longmapsto \frac{-3}{2x}$

sont continues sur $]0;+\infty[$, qui est un intervalle.

Le théorème de Cauchy linéaire livre :

Sol$(\mathcal{E},]0;+\infty[)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathcal{C}^2(]0;+\infty[, \mathbb{R})$.

x est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si :

$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$ est solution de

$(S) : X' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1}{4x} & \frac{-3}{2x} \end{bmatrix} X$,

où $X \in \mathcal{C}^1(]0;+\infty[, \mathbb{R})$

Pour résoudre $(\mathcal{E})$ sur $]0;+\infty[$, il suffit de trouver 2 solutions linéairement indépendantes.

Cherchons des solutions de $(\mathcal{E})$ sur un voisinnage de 0 développables en série entière :

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

$y : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution de $(\mathcal{E})$

sur $]-R, R[$

$$\iff \forall x \in]-R, R[, \quad 4x \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} + 6 \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x = 0$$

$$\iff \sum_{n=0}^{+\infty} \boxed{?} x^n = 0$$

$\forall x \in]-R, R[,\ \sum_{n=2}^{+\infty} 4a_n n(n-1)x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} 6a_n n x^{n-1}$

$+ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

$= 0$

Donc $0 = \sum_{n=1}^{+\infty} 4a_{n+1}(n+1)n x^n$

$+ \sum_{n=0}^{+\infty} 6a_{n+1}(n+1)x^n$

$+ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

Par unicité de coefficients d'une série entière, de rayon de convergence non-nul :

$a_1 = \frac{a_0}{6}$,

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 4a_{n+1}(n+1)n + 6a_{n+1}(n+1) = -a_n$

donc $a_1 = \frac{a_0}{6}$, et

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = \frac{-a_n}{(n+1)(4n+6)} = \frac{-a_n}{2(n+1)(2n+3)}$

$a_1 = \frac{-a_0}{3!}$, $a_2 = \frac{a_0}{5!}$, $a_3 = \frac{-a_0}{7!}$

Conjecture : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} a_0$.

Preuve : (Récurrence à rédiger)

Soit $y \left| \begin{array}{rcl}]-R, R[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^n \end{array} \right.$,

qui est solution de $(\mathcal{E})$ sur $]-R, R[$.

$R = +\infty$: indication donnée, pas besoin de le prouver.

$$y_1 \left| \begin{array}{rcl}]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^n \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\sqrt{x})^{2n+1}$$

$$= \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}.$$

On cherche une solution sous la forme :

$y_2 = k y_1$, où $k \in \mathcal{C}^2(]0;+\infty[, \mathbb{R})$.

TD "EDL" : Exercice 4

$(\mathcal{E})$: $y'(t) + a(t)y(t) = 0$, $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,

avec $a \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ intégrable finie.

Montrer que toutes les solutions de $(\mathcal{E})$ sont bornées :

$Sol(\mathcal{E})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de dimension 1.

Soit $A : t \longmapsto -\int_t^{+\infty} a(u)\,du$

une primitive de a (théorème fondamental de l'analyse).

Soit $y \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \exp\left(\int_t^{+\infty} a(u)\,du\right) \end{array} \right.$

Montrons que y est bornée :

Soit $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_t^{+\infty} a(u)\,du \leq \left| \int_t^{+\infty} a(u)\,du \right|$$

$$\leq \int_t^{+\infty} |a(u)|\,du$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |a(u)|\,du = K$$

Comme exp croissante sur $\mathbb{R}$,

$\exp\left(\int_t^{-\infty} a(u)\,du\right) \leq \exp(K)$,

donc y est bornée.