Équations différentielles linéaires

Retour sur la résolution de $(\mathcal{E}H_4)$ $x^{(4)} = x$, d'inconnue $x \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

x est solution de $(\mathcal{E}H_4)$ ssi $\begin{pmatrix} x \\ x' \\ x'' \\ x''' \end{pmatrix}$ est sol de

$$X' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} X, \text{ où } X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C}))$$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4}{=} \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 & 0 \\ \lambda-1 & \lambda & -1 & 0 \\ \lambda-1 & 0 & \lambda & -1 \\ \lambda-1 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_3}{=} (\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ \lambda+1 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

$= (\lambda-1)(\lambda+1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$

$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{=} (\lambda-1)(\lambda+1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$

$= (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-i)(\lambda+i)$

<u>Exercice 35</u> (Cours)

$(SH) \begin{cases} x' = x + 2y - z \\ y' = 2x + 4y - 2z \\ z' = -x - 2y + z \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$

i.e (SH) $X' = AX$, $X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

C'est un SDL1.

- La fct° $t \mapsto A$ est constante, donc $\mathcal{C}^0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Le thm de Cauchy linéaire livre

$\mathcal{S}ol(SH)$ est un sev de dim 3 de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$

<u>But</u> Trouver 3 solutions linéairement indépendantes de (SH)

① $\lambda \in Spec(A)$, $\underbrace{V \in E_\lambda(A)}_{AV = \lambda V} \subset \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ avec $V \neq 0$.

Mq $X \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ t \mapsto e^{\lambda t} V = \begin{pmatrix} v_1 e^{\lambda t} \\ v_2 e^{\lambda t} \\ v_3 e^{\lambda t} \end{pmatrix} \end{array} \right.$ est solution de $(\mathcal{S}H)$

. X $\mathcal{C}^1$?

- X est dérivable sur $\mathbb{R}$ car toutes ses composantes le sont.
- $X' \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ t \mapsto \lambda e^{\lambda t} V = \lambda \begin{pmatrix} v_1 e^{\lambda t} \\ v_2 e^{\lambda t} \\ v_3 e^{\lambda t} \end{pmatrix} \end{array} \right.$ $\mathcal{C}^0$ car chacune de ses composantes le sont.

Donc X est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

. Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$X'(t) = \lambda e^{\lambda t} V = e^{\lambda t} \underbrace{\lambda V}_{AV} = e^{\lambda t} AV = A \underbrace{e^{\lambda t} V}_{X(t)} = AX(t)$$

Donc $X \in Sol(\mathcal{S}H)$

② Réduction de A

1ère solution :

$C_1 = -C_3$, donc $rg(A) \leq 2$
donc 0 vp de A
donc $X \mid \chi_A$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 1 \\ -2 & \lambda-4 & 2 \\ 1 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_3}{=} \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 1 \\ 0 & \lambda-4 & 2 \\ \lambda & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{=} \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 1 \\ 0 & \lambda-4 & 2 \\ 0 & 4 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \dots$$

Puis on s'intéresse aux sous-espaces propres.

2e solution

- $\underbrace{A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\neq 0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc 0 vp de A avec $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{vp}$ associé.

- $C_2 = 2C_1$, $A\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\neq 0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est $\vec{vp}$ pour la vp 0 non-colinéaire à $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\dim(\underbrace{E_0(A)}_{\ker(A)}) \geq 2$ et $\neq 3$, donc $= 3$

Or $\underset{\overset{\shortparallel}{2}}{\dim(E_0(A))} \leq \mathrm{mult}(0, \chi_A)$, d'où $X^2 \mid \chi_A$

$\chi_A = X^2(X-\lambda)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\chi_A = X^3 - 6X^2$ donc $\lambda = 6$.
$-\mathrm{Tr}(A)$

Donc $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(A) = \{0 ; 6\}$.
donc $\underbrace{\dim(E_0(A))}_{2} + \underbrace{\dim(E_6(A))}_{\geq 1} \leq \overbrace{\dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))}^{\leq 3}$

Donc A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$ base de $E_0(A)$

$A - 6I_3 = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$, or $C_1 + 2C_2 = C_3$

Donc $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \in E_6(A)$

Résolution de (SH)

$X_1 \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ t \mapsto e^{0 \times t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \end{array} \right.$

$X_2 \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ t \mapsto e^{0 \times t}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} \end{array} \right.$

$X_3 \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ t \mapsto e^{6t}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \end{array} \right.$

Sol de (SH)

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tq $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 = 0$

$\Leftarrow\Rightarrow \quad \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Or A diagonalisable sur $\mathbb{R}$, donc $E_0(A) \oplus E_6(A) = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

et $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

À fortiori, elle est libre.

D'où $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

$Sol(SH) = Vect(X_1, X_2, X_3)$

$= \left\{ \cancel{\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \\ \end{pmatrix}} \begin{vmatrix} \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ t \mapsto \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 e^{6t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{vmatrix} \; (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

<u>Exercice 13</u> (TD)

$(\mathcal{E}) \; \underbrace{4x}y'' + 6y' + y = 0$

⚠ Aucun thm de Cauchy linéaire sur $\mathbb{R}$.

Sur $]0;+\infty[$ $\quad (\mathcal{E}) \Leftrightarrow y'' = -\frac{3}{2x} y' - \frac{1}{4x} y$ (EDL2 homogène)

$a_1 \begin{vmatrix}]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto -\frac{3}{2x} \end{vmatrix}$, $a_0 \begin{vmatrix}]0;+\infty[\\ x \mapsto -\frac{1}{4x} \end{vmatrix}$ sont $\mathcal{C}^0$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$

Le thm de Cauchy lin livre $Sol(\mathcal{E},]0;+\infty[)$ sev de $\mathcal{C}^2(]0;+\infty[,\mathbb{R})$

y sol de $(\mathcal{E})$ ssi $\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ sol de

$$Y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_0 & a_1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4x} & -\frac{3}{2x} \end{pmatrix}} Y, \quad \text{où } Y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}))$$

• Rechercher une solution de $\mathcal{E}$ DSE au voisinage de 0

Soit $\sum a_n x^n$ une SE de rayon de cv $R>0$.

$y \left| \begin{array}{l}]-R;R[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array} \right.$ est solution de $\mathcal{E}$ sur $]-R;R[$ ssi

$\forall x \in]-R;R[$,

$$\underbrace{4x \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} + 6 \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n}_{\sum_{n=?}^{+\infty} b_n x^n} = 0$$

$\iff \forall x \in]-R;R[, \sum_{n=2}^{+\infty} 4n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} 6n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$

$\iff \forall x \in]-R;R[, \sum_{n=1}^{+\infty} 4(n+1) n a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 6(n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$

$$\iff \forall x \in]-R;R[,\ 6a_1 + a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(4(n+1)n + 6(n+1)\right)a_{n+1} + a_n \right] x^n = 0$$

Par ! d'un DSE avec $R>0$,

$$\begin{cases} 6a_1 + a_0 = 0 \\ \forall n \geq 1,\ a_{n+1} = -\dfrac{1}{2(n+1)(2n+3)} a_n \end{cases}$$

$$a_1 = -\frac{1}{3\times 2} a_0 = -\frac{1}{3!} a_0$$

$$a_2 = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times \left(-\frac{1}{3\times 2} \right) a_0 = \frac{1}{5!} a_0$$

$$a_3 = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{5!} a_0 = -\frac{1}{7!} a_0$$

Conj $\forall n \geq 1,\ a_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} a_0$ (récurrence), vaut également en 0

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^n$$

$x>0$ $$y(x) = \frac{a_0}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\sqrt{x}\right)^{2n+1}$$

$y : \begin{cases}]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \end{cases}$ est solution de (E) sur $]0;+\infty[$.