TD – Équations différentielles linéaires

Exercice de la banque CCINP n°32. — *Soit l'équation différentielle :*

$$(\mathcal{E}) \qquad x\,(x-1)\,y'' + 3\,x\,y' + y = 0$$

1. *Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle* $]-r, r[$ *de* $\mathbf{R}$*, avec* $r > 0$*. Déterminer la somme des séries entières obtenues.*
2. *Est-ce que toutes les solutions de* $(\mathcal{E})$ *sur* $]0,1[$ *sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur* $]-1,1[$ *?*

Exercice de la banque CCINP n°42. — *On considère les deux équations différentielles suivantes :*

$$(\mathcal{EH}) \quad 2\,x\,y' - 3\,y = 0 \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{E}) \quad 2\,x\,y' - 3\,y = \sqrt{x}$$

1. *Résoudre l'équation* $(\mathcal{EH})$ *sur l'intervalle* $]0, +\infty[$.
2. *Résoudre l'équation* $(\mathcal{E})$ *sur l'intervalle* $]0, +\infty[$.
3. *L'équation* $(\mathcal{E})$ *admet-elle des solutions sur l'intervalle* $[0, +\infty[$ *?*

Exercice de la banque CCINP n°74. — *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. *Justifier que* A *est diagonalisable.*
2. *Déterminer les valeurs propres de* A *puis une base de vecteurs propres associés.*
3. *On considère le système différentiel :*
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & x + 2\,z \\ y' & = & y \\ z' & = & 2\,x + z \end{array} \right.$$
où x, y, z *désignant trois fonctions de la variable* t*, dérivables sur* $\mathbf{R}$*. En utilisant la question 2 et en le justifiant, résoudre ce système.*

Exercice de la banque CCINP n°75. — *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. *Démontrer que* A *n'est pas diagonalisable.*
2. *On note* f *l'endomorphisme de* $\mathbf{R}^2$ *canoniquement associé à* A*. Trouver une base* (v_1, v_2) *de* $\mathbb{R}^2$ *dans laquelle la matrice de* f *est de la forme* $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$*. On donnera explicitement les valeurs de* a*,* b *et* c*.*
3. *En déduire la résolution du système différentiel :*
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & -x - 4\,y \\ y' & = & x + 3\,y \end{array} \right.$$

Exercice 1 ★☆☆ — *Résoudre sur* $]1, +\infty[$ *l'équation différentielle :*

$$(\mathcal{E}) \qquad y' + \frac{x}{x^2 - 1}\,y = 2\,x$$

`edlsOrdre1`

Exercice 2 ★★☆ — *Résoudre sur* $\mathbf{R}$ *l'équation différentielle :*

$$(\mathcal{E}) \qquad t^2\,y' - y = 0$$

`raccordementEdlsOrdre1Homogene`

Exercice 3 ★★☆ — *Résoudre sur* $\mathbf{R}$ *l'équation différentielle :*

$$(\mathcal{E}) \qquad (1-t)\,y' - y = t$$

`raccordementEdlsOrdre1`

Exercice 4 ★★☆ — *Soit* $a \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$ *une fonction intégrable sur* $\mathbf{R}$*. Démontrer que toutes les solutions de l'équation différentielle :*

$$(\mathcal{E}) \qquad y'(t) + a(t)\,y(t) = 0$$

sont bornées.

`edlsOrdre1HomogeneUniqueSolutionsToutesBornees`

Exercice 5 ★★★ — *Soit* $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$ *telle que* $f(x) + f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$*. Démontrer que* $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$*.*

`edlsOrdre1MasqueeLimiteNulleEnInfini` [corrigé]

Exercice 6 ★★★ — *Soient* $a \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$ *une fonction impaire et* $b \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$ *une fonction paire. Démontrer que l'équation différentielle :*

$$(\mathcal{E}) \qquad y'(t) + a(t)\,y(t) = b(t)$$

possède une unique solution impaire.

`edlsOrdre1UniqueSolutionImpaire`

Exercice 7 ★☆☆ — *Résoudre sur* $\mathbf{R}$ *le système différentiel :*

$$(\mathcal{S}) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x' &=& 4\,x - 2\,y \\ y' &=& x + y \end{array} \right.$$

`sdlOrdre1CoefficientsConstantsHomogeneDiagonalisableFormat2`

Exercice 8 ★☆☆ — *Résoudre sur* $\mathbf{R}$ *le système différentiel :*

$$(\mathcal{S}) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x' &=& y + z \\ y' &=& x \\ z' &=& x + y + z \end{array} \right.$$

`sdlOrdre1CoefficientsConstantsHomogeneDiagonalisableFormat3`

Exercice 9 ★☆☆ — *Résoudre sur* $\mathbf{R}$ *le système différentiel :*

$$(\mathcal{S}) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x' &=& -x + 3\,y + e^t \\ y' &=& -2\,x + 4\,y \end{array} \right.$$

`sdlOrdre1CoefficientsConstantsDiagonalisableFormat2`

Exercice 10 ★★★ — *Soit* $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$*. Démontrer que toutes les solutions du système différentiel :*

$$(\mathcal{S}) \qquad X' = A\,X$$

tendent vers 0 *en* $+\infty$ *si et seulement si les valeurs propres complexes de* A *ont des parties réelles strictement négatives.*

`sdlOrdre1CoefficientsConstantsComplexesHomogeneLimiteNulleEnInfini`

Exercice 11 ★★★ — *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On considère le système différentiel :*

$$(\mathcal{S}) \qquad X' = A\,X$$

Démontrer que toutes les solutions de $(\mathcal{S})$ sont polynomiales si et seulement si la matrice A est nilpotente.

`sdlOrdre1CoefficientsConstantsHomogeneToutesSolutionsPolynomiales`

Exercice 12 ★★☆ — *Considérons le système différentiel :*

$$(\mathcal{S}) \qquad \begin{cases} x' &= y - z \\ y' &= z - x \\ z' &= x - y \end{cases}$$

On cherche les solutions $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1\left(\mathbf{R}, \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})\right)$ vérifiant en outre la condition $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ et $z(0) = 0$.

1. *Discuter l'existence et l'unicité de la solution.*
2. *Démontrer que la trajectoire de la solution est contenue dans l'intersection d'une sphère S et d'un plan P. Reconnaître $S \cap P$.*
3. *Résoudre le système différentiel $(\mathcal{S})$, puis retrouver le résultat de la question précédente.*

`sdlOrdre1CoefficientsConstantsDiagonalisableComplexeFormat3Geometrie`

Exercice 13 ★☆☆ — *Déterminer les solutions développables en série entière au voisinage de 0 de l'équation différentielle :*

$$(\mathcal{E}) \qquad 4\,x\,y'' + 6\,y' + y = 0$$

`rechercheSolutionsDseEdlsOrdre2Homogene`

Exercice 14 ★★☆ — *Résoudre sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle*

$$(\mathcal{E}) \qquad \left(t^2 + 1\right)\,x'' - 2\,x = t$$

On pourra commencer par rechercher une fonction polynomiale solution de l'équation différentielle homogène associée à $(\mathcal{E})$.

`edlsOrdre2SolutionPolynomiale`

Exercice 15 ★★☆ — *Soit $p\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}_+$ une fonction continue, non identiquement nulle. On souhaite démontrer que toutes les solutions de l'équation différentielle :*

$$(\mathcal{E}) \qquad y'' + p(x)\,y = 0$$

s'annulent. Pour cela, on raisonne par l'absurde et on considère une solution f de $(\mathcal{E})$, qui ne s'annule pas.

1. *Justifier que la fonction f est de signe constant. Quitte à changer f en $-f$, nous pouvons supposer que $f > 0$ dans la suite.*
2. *Soit a un réel quelconque. Justifier que la courbe représentative de f est en dessous de sa tangente au point de coordonnées $(a, f(a))$.*
3. *En déduire que $f'(a) = 0$.*
4. *Conclure.*

`edlsOrdre2HomogeneTouteSolutionAnnulation`

Exercice 16 ★★★ —

1. *Résoudre sur* $\mathbf{R}$ *l'équation différentielle*
$$(\mathcal{EH}) \qquad y'' + 4\,y = 0$$

2. *Soit* $g \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. *On introduit la fonction* h *définie par :*
$$h \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^x g(t)\, \sin(2x - 2t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$
Démontrer que la fonction h *est solution de l'équation différentielle :*
$$(\mathcal{E}) \qquad y'' + 4\,y = g$$
puis résoudre $(\mathcal{E})$.

3. *Soit* $f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ *telle que* $f'' + 4\,f \geqslant 0$. *Démontrer que, pour tout* $x \in \mathbf{R}$, $f(x) + f\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) \geqslant 0$.

`edlsOrdre2CoefficientsConstantsSolutionParticuliereFormeIntegraleEtudeQuantitative`

Exercice 17 ★★☆ — *On considère l'équation différentielle*
$$(\mathcal{E}) \qquad x''' - 4\,x'' + 5\,x' - 2\,x = 0$$

1. *Déterminer une matrice* $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ *telle que, pour toute fonction* $x \in \mathcal{C}^3(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, x *est solution de* $(\mathcal{E})$ *si et seulement si la fonction* $\begin{pmatrix} x \\ x' \\ x'' \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1\left(\mathbf{R}, \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})\right)$ *est solution du système différentiel :*
$$(\mathcal{S}) \qquad X' = A\,X$$

2. *Trigonaliser* A *sur* $\mathbf{R}$, *puis résoudre* $(\mathcal{E})$.

`edlsOrdre3CoefficientsConstantsHomogeneTrigonalisable`

---

edlsOrdre1MasqueeLimiteNulleEnInfini [énoncé]

Un corrigé de l'exercice 5

(a) *Expression de f en fonction de $f+f'$.* Soit g la fonction continue et de limite 0 en $+\infty$ définie par :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x)+f'(x) \end{array} \right.$$

La fonction f est solution de l'EDLS1 :

$$(\mathcal{E}) \qquad y'+y=g(x) \quad , \quad \text{d'inconnue } y \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$$

L'EDLS1 homogène associée à $(\mathcal{E})$ est :

$$(\mathcal{EH}) \qquad y'+y=0 \quad , \quad \text{d'inconnue } y \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$$

Nous calculons :

$$\mathrm{Sol}(\mathcal{EH}) = \mathrm{Vect}\left(y_h \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & e^{-x} \end{array} \right. \right)$$

Si $k \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$, alors la fonction $k\,y_h$ est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si :

$$\forall\, x \in \mathbf{R} \qquad k'(x) = e^x\, g(x)$$

Nous en déduisons, grâce au théorème fondamental de l'analyse, que la fonction y_p définie par :

$$y_p \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & e^{-x} \displaystyle\int_0^x e^u\, g(u)\ \mathrm{d}u \end{array} \right.$$

est solution de $(\mathcal{E})$. Par suite :

$$\mathrm{Sol}(\mathcal{E}) = y_p + \mathrm{Vect}\left(y_h \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & e^{-x} \end{array} \right. \right)$$

Cette étude nous livre :

$$(\star) \qquad \exists\, k \in \mathbf{R} \quad f(x) = k\, e^{-x} + \underbrace{e^{-x} \int_0^x e^u\, g(u)\ \mathrm{d}u}_{y_p(x)}$$

(b) *Réduction de l'étude.* D'après $(\star)$, il suffit de démontrer que $y_p(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ pour établir que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

(c) *Conclusion à l'aide d'un découpage « à la Cesàro ».* Soit $\varepsilon > 0$. Comme $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$:

$$\exists\, A_1 > 0 \qquad \forall\, u \geqslant A_1 \quad |g(u)| \leqslant \varepsilon$$

Soit $x \geqslant A_1$.

$$\begin{aligned} |y_p(x)| &\leqslant e^{-x} \int_0^{A_1} e^u\ |g(u)|\ \mathrm{d}u + e^{-x} \int_{A_1}^x e^u\ |g(u)|\ \mathrm{d}u \qquad \text{[inégalité triangulaire et relation de Chasles]} \\ &\leqslant e^{-x} \int_0^{A_1} e^u\ |g(u)|\ \mathrm{d}u + \varepsilon\, e^{-x} \int_{A_1}^x e^u\ \mathrm{d}u \\ &\leqslant e^{-x} \int_0^{A_1} e^u\ |g(u)|\ \mathrm{d}u + \varepsilon \qquad \left[\text{car } e^{-x} \int_{A_1}^x e^u\ \mathrm{d}u \leqslant 1\right] \end{aligned}$$

Comme $e^{-x} \underbrace{\int_0^{A_1} e^u\ |g(u)|\ \mathrm{d}u}_{\text{constante}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$:

$$\exists\, A_2 > 0 \qquad \forall\, x \geqslant A_2 \quad \left| e^{-x} \int_0^{A_1} e^u\ |g(u)|\ \mathrm{d}u \right| \leqslant \varepsilon$$

Nous en déduisons que :

$$\forall\, x \geqslant \max\{A_1, A_2\} \quad |y_p(x)| \leqslant 2\,\varepsilon$$