Exercice : ♡

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$.

Montrer que :

$(\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^T A X \geq 0) \iff \mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathbb{R}_+$

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(A)$,
X vecteur propre de A associé à λ.

$$0 \leq X^T A X = \lambda \|X\|^2,$$

donc $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A deux-à-deux distinctes.

$A \in S_n(\mathbb{R})$, donc d'après le théorème spectral :

$$\exists P \in O_n(\mathbb{R}),\ A = PDP^T,\ D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$X^T A X = X^T P D P^T X$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2, \text{ où } \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = P^T X$$

$$\geq 0.$$

Exercice 14 : $(e_1, \dots, e_n) = \mathcal{C}an_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$,

$A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in O_n(\mathbb{R})$,

$C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A.

1. $\langle u, v \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} e_i, \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} e_k \rangle$

$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \langle e_i, e_k \rangle a_{i,j}$

$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$

Inégalité de Cauchy-Schwarz :

$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$, où $\|u\| = \sqrt{n}$,
$\|v\| = \sqrt{n}$,

donc $\left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \right| \leq n$.

2. Cette inégalité est optimale, puisqu'elle est atteinte pour $A = I_n \in O_n(\mathbb{R})$.

7. (Question bonus)

Montrer que $\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2 = n$.

$A \in O_n(\mathbb{R})$, donc $A^T A = I_n$.

Donc $Tr(A^T A) = n$.

Or, $Tr(A^T A) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2 = n$.

Exercice 3 :

1. Notons f^* l'adjoint de f :

$\forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle f(M), N \rangle = \langle M, f^*(N) \rangle$

donc $\mathrm{Tr}((AM)^T N) = \mathrm{Tr}(M^T A^T N) = \mathrm{Tr}(M^T f^*(N))$

Donc si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixé,
$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle M, A^T N - f^*(N) \rangle = 0$,

donc $A^T N - f^*(N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^\perp = \{0\}$.
Donc $f^*(N) = A^T N$.

2. Caractère autoadjoint :

Analyse : Supposons $f = f^*$:

Alors $f(I_n) = f^*(I_n)$,
donc $A = A^T$.

Synthèse : Supposons $A = A^T$:

On a alors directement $f = f^*$.

Caractère isomorphique :

Analyse : Supposons que f est un isomorphisme et que $f^{-1} = f^*$.

Alors $f \circ f^* = id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$,

donc $f \circ f^*(I_n) = AA^T = I_n$,

donc $A \in O_n(\mathbb{R})$.

Synthèse : Supposons que $A \in O_n(\mathbb{R})$:

$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f \circ f^*(M)$
$= AA^T M$
$= M$

donc $f \in Gl(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et $f^{-1} = f^*$.

Donc f est une isométrie.

Exercice 11 :

1. a) $A \in Gl_n(\mathbb{R})$,
donc $\mathrm{Vect}([A]_{:,1}, [A]_{:,2}, \dots, [A]_{:,n})$ est de dimension n.

Donc cette famille est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

b) On souhaite appliquer le théorème de changement de base :

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On note $(f_1, \dots, f_n) = ([A]_{:,1}, \dots, [A]_{:,n})$.

On applique l'algorithme de Gram-Schmidt à $(f_1, \dots, f_n)$ pour $(\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_n)$ une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$\forall i \in [\![1, n]\!], \ \hat{f}_i \in \mathrm{Vect}((f_j)_{1 \leq j \leq i})$.

La coordonnée de $\hat{f}_i$ dans $(f_1, \dots, f_n)$ selon f_i est strictement positive.

(i.e. $[\mathrm{Mat}_{(f_1, \dots, f_n)}(\hat{f}_i)]_i > 0$).

Donc $P_{f \to \hat{f}} \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$, et ses coefficients diagonaux sont strictement positifs.

$$A = P_{e \to f} = \underbrace{P_{e \to \hat{f}}}_{=: Q} \times \underbrace{P_{\hat{f} \to f}}_{=: R}$$

$Q \in O_n(\mathbb{R})$ comme matrice de passage entre deux bases orthonormées.

$R = (P_{f \to \hat{f}})^{-1}$ triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs.

2. Si $A \notin GL_n(\mathbb{R})$, l'inégalité est vraie.

Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$:

soit $A = QR$ comme en 1 :

$$\det(A) = \underbrace{\det(Q)}_{= 1} \times \det(R)$$

$$R = ([R]_{:,1} | \cdots | [R]_{:,n})$$

$\forall j \in [\![1, n]\!]$, $Q[R]_{:,j} = [A]_{:,j}$

et $$\|[A]_{:,j}\|_2^2 = (Q[R]_{:,j})^T Q[R]_{:,j}$$
$$= [R]_{:,j}^T [R]_{:,j}$$
$$= \|[R]_{:,j}\|_2^2$$

L'inégalité équivaut donc à :

$$\prod_{i=1}^{n} |[R]_{i,i}| \leq \prod_{i=1}^{n} \|[R_{:,j}]\|_2 .$$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\|[R]_{:,i}\|^2 = \sum_{j=1}^{n} [R]_{:,j}^2 \geq [R_{i,i}]^2$$

La croissance de la racine carrée sur $\mathbb{R}_+$ nous livre alors le résultat.

Exercice 18 :

1. S est symétrique et réelle, donc ortho-diagonalisable sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème spectrale.

2. Soit $\mu \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(A)$, X vecteur propre de A associé à μ.

$X^T A X = \mu \|X\|^2$, $X^T A^T X = \mu \|X\|^2$,
$X^T S X = \mu \|X\|^2$.

Or, $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$, $S = P \times \overbrace{\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}^{D} \times P^T$,

donc $X^T S X = X^T P D P^T X$
$= Y^T D Y$, $Y := P^T X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2$

donc $\lambda_1 \|P^T X\|^2 \leq X^T S X \leq \lambda_n \|P^T X\|^2$

donc $\lambda_1 \|X\|^2 \leq \mu \|X\|^2 \leq \lambda_n \|X\|^2$.