TD Correction

Exercice 14 (Cours)

(Q1) $u = \sum_{k=1}^{n} e_k$, $v = \sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ a_{n,i} \end{pmatrix}$

Donc $\langle u, v \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} e_k, \sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ \vdots \\ a_{n,i} \end{pmatrix} \rangle$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \langle e_k, \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ \vdots \\ a_{n,i} \end{pmatrix} \rangle = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{k,i}$$

Par inégalité de Cauchy - Schwarz,

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

$$\|u\|^2 = \langle \sum_{k=1}^{n} e_k, \sum_{p=1}^{n} e_p \rangle = \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} \underbrace{\langle e_k, e_p \rangle}_{\delta_{k,p}} = n$$

$$\|v\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} \underbrace{\langle e_k, e_p \rangle}_{\delta_{k,p}} = n.$$

D'où $|\langle u, v \rangle| \leq \sqrt{n} \sqrt{n} = n$

D'où le résultat recherché.

Q2) On prend $A = I_n$.

$$\langle u, v \rangle = \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} \delta_{k,p} = n.$$

On a un cas d'égalité, l'inégalité est donc optimal.

Q3) Mq $\sum_{1 \leq i,j \leq n} (a_{i,j})^2 = 1$

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} (a_{i,j})^2 = Tr(A^T A) = Tr(I_n) = n$$

Exercice 1 (TD)

Soit B BON de E.

Alors $Mat_B(f^*) = Mat_B(f)^T$

D'où $\det(f) = \det(Mat_B(f))$

$$= \det(Mat_B(f)^T) = \det(f^*)$$

Exercice 4

Mq $\left| \begin{array}{ll} Ker(u^*) = Im(u)^\perp & (1) \\ Im(u^*) = Ker(u)^\perp & (2) \end{array} \right.$

(1) $\boxed{\subset}$ Soit $x \in Ker(u^*)$.

Soit $y \in Im(u)$, montrons que $\langle x, y \rangle = 0$.
Il existe $a \in E$ tel que $y = u(a)$.

$\langle x, y\rangle = \langle u(a), x\rangle = \langle a, \underbrace{u^*(x)}_{=0_E}\rangle = 0_{\mathbb{R}}$ Donc $Ker(u^*) \subset Im(u)^{\perp}$

(2) $\boxed{C}$ Soit $x \in Im(u^*)$. Il existe $a \in E$ tel que $u^*(a) = x$

Soit $y \in Ker(u)$. Montrons que $\langle x, y\rangle = 0$

$\langle x, y\rangle = \langle u^*(a), y\rangle = \langle a, \overbrace{\underbrace{u}_{(u^*)^* = u}(y)}^{=0_E}\rangle = 0_{\mathbb{R}}$

Donc $Im(u^*) \subset Ker(u)^{\perp}$

(Remarque : On sait que $Ker(u^*) \subset Im(u)^{\perp}$

$u \leftarrow u^*$: $Ker(u) \subset Im(u^*)^{\perp}$

D'où $Im(u^*) \subset Ker(u)^{\perp}$)

(1) $\boxed{\supset}$ Soit $z \in Im(u)^{\perp}$

Alors $\forall x \in E$, $\langle u(x), z\rangle = 0$

Donc $\forall x \in E$, $\langle x, u^*(z)\rangle = 0$

Ainsi $u^*(z) \in E^{\perp} = \{0_E\}$

Donc $u^*(z) = 0_E$

Donc $z \in Ker(u^*)$

(2) On sait que $\mathrm{Im}(v)^{\perp} \subset \mathrm{Ker}(v^*)$
Donc $(v \leftarrow v^*)$ $\mathrm{Im}(v^*)^{\perp} \subset \mathrm{Ker}(v)$

En passant à l'orthogonal ($\searrow$ par l'inclusion),

$$\mathrm{Im}(v^*) \supset \mathrm{Ker}(v)^{\perp}$$

Exercice 3

Q1) Soit $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\langle f(M), N \rangle = \langle M, f^*(N) \rangle$$

$$= \langle AM, N \rangle = \mathrm{tr}((AM)^T N)$$
$$= \mathrm{tr}(M^T A^T N)$$
$$= \langle M, A^T N \rangle.$$

Par l'unicité de l'adjoint,

$$f^* \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ N \mapsto A^T N \end{array} \right.$$

Q2) Indication : Analyse-Synthèse.

Exercice 15

(Reformulation : $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ vp réelles de A.

Mq $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} [A]_{i,j}^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$)

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} [A]_{i,j}^2 = Tr(A^T A)$$

Or $A \in S_n(\mathbb{R})$, par le théorème spectral,

$$\exists P \in O_n(\mathbb{R}) \text{ tel que } A = P^T \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{D} P$$

D'où : $tr(A^T A) = tr((P^T D P)^T (P^T D P))$

$$= tr(P^T D^T P P^T D P)$$

$$= tr(P^T \underbrace{D^T}_{=D} D P) = tr(P^T D^2 P)$$

$$= tr(P P^T D^2) = tr(D^2) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 .$$

Exercice ♡ (futur énoncé de cours)

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$

$(\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^T A X \geq 0) \iff \mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathbb{R}_+$

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral,

$\exists P \in O_n(\mathbb{R}), \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ telsque

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \underbrace{P^{-1}}_{P^T}$$

. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$X^T A X = \underbrace{\boxed{X^T P}}_{(y_1, \dots, y_n)} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \overbrace{\boxed{P^T X}}^{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\lambda_k}_{\geq 0} \underbrace{y_k^2}_{\geq 0} \geq 0$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $\forall x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^T A X \geq 0$. (*)

Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(A)$, $X \in E_\lambda(A) \setminus \{0\}$

(*) livre $X^T A X \geq 0$, or $X^T A X = \lambda X^T X = \lambda \underbrace{\|X\|^2}_{> 0 \text{ car } X \neq 0} \geq 0$

Donc $\lambda \geq 0$.

Exercice 19

(1) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tq $\|X\| = 1$.

Mq $\|AX\|^2 \leq \ell$ (on en déduira $|||A||| \leq \ell$)

$$\|AX\|^2 = (AX)^T AX = X^T \underbrace{A^T A}_{\in S_n(\mathbb{R})} X$$

Donc par le théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que

$$A^T A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} P^T \text{ avec } (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\|AX\|^2 = \underbrace{X^T P}_{(y_1, \dots, y_n)} \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \underbrace{P^T X}_{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2$$

Par l'ex précédent,

$$\|AX\|^2 = X^T A^T A X \geq 0 \Rightarrow \operatorname{Spec}_{\mathbb{R}}(A^T A) \in \mathbb{R}_+$$

$$\|AX\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\lambda_k}_{\leq \ell} y_k^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \ell y_k^2 = \ell \|P^T X\|^2$$

$$= \ell \|X\|^2 \quad (\text{car } P^T \in O_n(\mathbb{R}))$$

$$= \ell$$

Donc $\|AX\|^2 \leq \ell$ indep de X

D'où par passage au sup sur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tq $\|X\| = 1$,

$|||A|||^2 \leq \ell$

Ordonnons nos vp : $0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ (vp de A^TA)

Trouvons $X \in S(0,1)$ tq $\|AX\|^2 = \rho = \lambda_n$

Soit X_n un vp unitaire pour A^TA associé à λ_n.

$$\|AX_n\|^2 = X_n^T A^T A X_n = \lambda_n \underbrace{X_n^T X_n}_{=1} = \lambda_n$$

On a prouvé que

$\forall X \in S(0,1), \ \|AX\|^2 \leq \rho$

égalité pour $X = X_n$

Donc $|||A|||^2 = \rho$.